TD Maple : Oraux 3

Michael Monerau

2 juin 2011

1 Retour sur les manipulations de matrices dans Maple...

Comme on l'a vu au dernier TD, Maple joue quelques tours dans la manipulation des matrices selon les versions, et c'est parfois difficile à démêler. Voici un pense-bête pour les oraux.

NB : Les majuscules sont importantes dans les noms.

1.1 Maple Version Vieux (éventuellement oraux Centrale)

On importe le package `linalg`. Tous les noms de fonctions n'ont pas de majuscule. Pour définir une matrice, on l'écrit en ligne (ce qui suit définit une matrice de 2 lignes et 3 colonnes) : `M := matrix ([[1,2,3],[1,2,3]]);`.

On obtient son noyau par `nullspace`, son image par `colspace` (ou `basis` de ses colonnes). Sa transposée est donnée par `transpose` et son inverse par `inverse`. La trace est donnée par `trace`, la décomposition LU par `LUdecomp`.

On dispose également des fonctions utiles pour faire pivots de Gauss & co. : `addcol`, `addrow`, etc. Pour voir tout ce qui est disponible, faire `with(plots);` et regarder les noms des fonctions importées, c'est explicite.

Pour faire une multiplication, vous pouvez soit utiliser la fonction `multiply` du package, soit écrire `evalm(A & * B)` où A et B sont deux matrices.

1.2 Maple Version Nouvelles (ie. Version ≥ 13 voire avant)

Ce qui précède fonctionne aussi, mais est *deprecated*, ie. plus supporté, peut disparaître dans une future version. Les bonnes pratiques veulent donc qu'on passe aux nouvelles versions qui sont normalement mieux pensées – mais rien n'y oblige si l'ancienne version marche.

NB : si vous choisissez une des deux méthodes, n'utilisez que les fonctions qui y correspondent. C'est-à-dire qu'il ne faut pas mélanger une matrice nouvelle version avec une ancienne version dans les fonctions, sinon vous aurez des erreurs incompréhensibles.

On importe cette fois le package `LinearAlgebra`. De même, en faisant `with(LinearAlgebra);` on voit les fonctions importées : `Determinant`, `MatrixInverse`, `Transpose`, `Trace`, `NullSpace`, `ColumnSpace`, `ColumnDimension` pour la dimension de l'image, etc.

On définit une matrice avec `M := Matrix ([[1,2,3],[1,2,3]]);` (noter la majuscule). Cette fois-ci, le produit matriciel s'écrit simplement `A.B` pour deux matrices “nouvelle version”.

Rappelons que tout ce qui concerne réduction, vecteurs propres et compagnie se retrouve en cherchant `eigen vectors/values` dans l'aide.

2 Visualisation d'équations différentielles et de systèmes autonomes, flots

Nous allons voir ici comment utiliser Maple pour visualiser des flux issus de systèmes autonomes (ie. ne dépendant pas du temps). Il faut commencer par importer les packages `plots` et `DEtools`.

Question 2.1. Système Définir le système suivant dans une variable `sys` (liste des deux équations) :

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) + x(t)^2 \end{cases}$$

Question 2.2. Equa diff

À l'aide de `dsolve`, écrire une procédure qui prend en argument un système en $x(t)$ et $y(t)$, t_0, x_0 et y_0 et qui renvoie une expression de la solution maximale du système telle que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, si elle existe.

L'exécuter sur le système ci-dessus. Si Maple ne renvoie pas de solution, utiliser l'option `type = numeric`. Que change cette option ? Que renvoie alors l'appel à `dsolve` ?

Question 2.3. Tracé

À l'aide de `odeplot`, écrire une procédure qui prend en argument un système en $x(t)$ et $y(t)$, t_0, x_0 et y_0 et qui trace la solution maximale du système telle que $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$, si elle existe.

L'exécuter sur le système ci-dessus.

Question 2.4. Tracé et champ de vecteurs

À l'aide de la fonction `phaseportrait`, faire une procédure identique pour tracer les solutions, avec en plus le champ de vecteur correspondant en arrière-plan.

L'exécuter sur le système ci-dessus.

Question 2.5. Tracé d'un champ de vecteurs

La fonction `fieldplot` permet de tracer un champ de vecteurs pour se donner une idée du comportement d'un système autonome.

Tracer le champ de vecteurs du système ci-dessus.

Question 2.6. Système de Lotka-Volterra

Utiliser les procédures des questions précédentes pour étudier qualitativement le système de Lotka-Volterra défini par les équations suivantes, où α, β, δ et γ sont des paramètres qu'on pourra faire varier à sa guise :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = -y(t)(\delta - \gamma x(t)) \end{cases}$$

3 Exo Centrale

On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = x^3 - y^3 \tag{1}$$

Question 3.1.

(a) Tracer le graphe de la solution maximale y de (1) telle que $y(0) = 1$, puis $y(0) = -1$.

(b) Tracer l'ensemble des points du plan par lesquels passe le graphe d'une solution avec une tangente horizontale.

Question 3.2. Soit $(]T_-, T_+[, y)$ une solution maximale de (1).

(a) Montrer qu'il existe $x_1 \in]T_-, T_+[$ tel que $y(x_1) < x_1$.

(b) Montrer que $y(x) \leq x$ pour $x \in [x_1, T_+[$.

(c) Montrer que $T_+ = +\infty$.

(d) Étudier la limite de y en $+\infty$.

(e) Étudier la branche infinie du graphe de y.

4 Exo Centrale 2

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) = \sin x - y(x)^3$.

Question 4.1.

(a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale y de (E) telle que $y(a) = b$. Que dire de son intervalle de définition J ? Que dire de deux solutions maximales y_1 et y_2 vérifiant respectivement $y_1(a) = b$ et $y_2(a + 2\pi) = b$?

(b) Avec le logiciel de calcul formel, tracer simultanément les graphes des solutions telles que $y(-1) = k/5$ avec $k = -5, -4, \ldots, 5$ d'abord sur $[-1, 5]$ puis sur $[-1, 15]$.

Question 4.2. Dans cette question, y est une solution maximale de (E), définie sur l'intervalle J. On veut établir que $\sup J = +\infty$. Soit $a \in J$ et $b = y(a)$.

(a) Montrer que si $b > 1$, il existe $a' > a$ tel que $y(a') = 1$ (raisonner par l'absurde). Énoncer une propriété analogue si $b < -1$.

(b) Montrer que si $b = 1$, alors y est strictement décroissante au voisinage de a. Énoncer une propriété analgoue si $b = -1$.

(c) Montrer que si $|b| < 1$, alors $|y(x)| < 1$ pour tout $x \in J \cap [a, +\infty[$. Montrer alors que $\sup J = +\infty$ (observer que y est lipschitzienne sur $J \cap [a, +\infty[$).

(d) Conclure que dans tous les cas, $\sup J = +\infty$ et qu'il existe x_0 tel que $|y(x)| < 1$ pour $x > x_0$.

Question 4.3. On va établir l'existence d'une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On note φ l'application qui à $b \in [-1, 1]$ associe la valeur en $x = 2\pi$ de la solution maximale de (E) telle que $y(0) = b$.

(a) On admet que la fonction φ vérifie : $|\varphi(b_2) - \varphi(b_1)| < |b_2 - b_1|$ pour tous b_1, b_2 distincts dans $[-1, 1]$. Montrer que φ possède un unique point fixe b_0 dans $[-1, 1]$.

(b) On note y_0 la solution maximale de (E) telle que $y_0(0) = b_0$. Montrer que y_0 est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est 2π-périodique.

(c) Á l'aide du logiciel de calcul formel, donner une valeur approchée de b_0 et tracer le graphe de y_0 sur un intervalle « assez large » de part et d'autre de 0.