TD Maple : Oraux 2

Michael Monerau

30 mai 2011

1 Exo Centrale

Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, paramétré par abscisse curviligine. On pose :

$$G(0) = M(0) \text{ et } G(s) = \frac{1}{s}\int_0^s M(\sigma)d\sigma \text{ si } s \neq 0$$

Question 1.1. On suppose dans cette question que $M(t) = (t, \cosh t)$. Calculer l'abscisse curviligine nulle en 0, paramétrer l'arc par abscisse curviligne. Calculer alors $G(s)$ et tracer sur un même graphique les supports des arcs M et G.

Question 1.2. On suppose dans cette question que $M(t) = (t, f(t))$ où f est convexe. Montrer que le support de G est au dessus de celui de M.

Question 1.3. Reprendre la question 1. avec $M(t) = (\cos t, \sin t)$.

Question 1.4. On suppose dans cette question que M est périodique. Montrer que $G(s)$ admet une limite lorsque $s \to +\infty$.

2 Exo Centrale 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Question 2.1. Montrer l'existence de $d = \min\left\{k \geq 0 \mid \ker f^k = \ker f^{k+1}\right\}$.

Question 2.2. Montrer que $E = \ker f^d \oplus Imf^d$.

Question 2.3. Montrer que $F = \ker f^d$ et $G = \ker f^d$ sont stables par f.

Question 2.4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit de la forme $\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$, où G est inversible et N nilpotente.

Question 2.5. À l'aide de Maple, traiter l'exemple où f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ canoniquement associé à la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Suite

Prendre ce qui n'a pas été fini de la feuille précédente (sur http ://www.michael.monerau.com).