TD Maple : Oraux 1

Michael Monerau

23 mai 2011

1 Théorème de réarrangement de Riemann

Question 1.1. Théorème
Montrer le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeurs réelles associée à une série semi-convergente, c'est-à-dire que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ell$ mais $\sum_k |u_k| = +\infty$. Alors pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = \alpha$.*

Question 1.2. Maple Écrire une procédure maple qui prend en argument le terme général de la suite u_n (ou ses premières valeurs) et une valeur α, puis qui trace sur un graphe les valeurs des 100 premières sommes partielles de la série permutée qui converge vers α.

2 Exo Centrale

On considère la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{lcl}]-\infty, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{\ln(1-x)} & si \quad x \neq 0 \\ -1 & si \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Question 2.1. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + o(x^N) \text{ lorsque } x \to 0$$

Question 2.2. À l'aide de Maple, calculer $a_0, \ldots, a_{20}$.

Question 2.3. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.

3 Exo Centrale bis

Soit $(\beta_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante et non majorée, telle que $\beta_0 \geq 1$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{\beta_n} \text{ pour } n \geq 0$$

Question 3.1. Montrer que si $u_n > \beta_n$ pour tout $n \geq 0$, alors $u_n \to +\infty$, et que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \leq \beta_{n_0}$, alors $u_n \to 0$.

Question 3.2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que si $u_0 < \lambda$ alors $u_n \to 0$, et si $u_0 > \lambda$, alors $u_n \to +\infty$.

Question 3.3. Dans cette question, on suppose que $\beta_n = \sqrt{n+1}$. À l'aide de Maple, donner un minorant de λ.

Question 3.4. On pose $v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$ pour $n \geq 0$. Exprimer v_n en fonction de v_0 et des β_k.

Question 3.5. Dans cette question, on suppose que $\beta_n = O(\rho^n)$, où $\rho > 1$. Montrer qu'alors $\lambda < +\infty$, et exprimer λ sous la forme d'une somme de série.

4 DL/DA implicites

4.1 Méthode

Supposons qu'on ait à faire le développement de la fonction u en fonction de x sachant qu'elle vérifie l'équation :

$$\forall x, \quad f(u(x)) = v(x)$$

(f et v sont connues, les ensembles de définition dépendant évidemment du contexte).

Pour trouver un développement limité de u, on procède par ré-injection : si on connaît u jusqu'à une certaine précision, ie. $u(x) = h(x) + o_{x \to a}(h(x))$ où h est une fonction connue, alors on pose $u(x) = h(x) + \varepsilon(x)$ où ε est inconnue. Puis on injecte :

$$f(h(x) + \varepsilon(x)) = v(x)$$

On peut alors demander à Maple de faire le développement limité de f lorsque x tend vers a. Alors, en remplaçant x par $\varepsilon(x)$, on obtient une équation sur ε qui permet de trouver son expression (en prenant garde à l'ordre des expressions en présence).

Ainsi, on obtient une nouvelle expression

$$u(x) = h(x) + \varepsilon(x) + \varepsilon_2(x)$$

où ε est maintenant connue et ε_2 est à nouveau un $o(\varepsilon(x))$ inconnu qu'on récupère par injection.

Noter qu'il faut prendre garde à la régularité de u (on en cherche un DA/DL !) et de f (les développements limités demandés à Maple vont de plus en plus loin).

4.2 Applications

Question 4.1. **Lambert Wilson**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $u(x) \in \mathbb{R}^+$ tel que $u(x)e^{u(x)} = x$.
2. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ainsi définie est $\mathcal{C}^\infty$.
3. Donner un développement limité à 3 termes de $u(x)$ lorsque $x \to 0$.
4. Pour vérifier votre développement, trouver une expression "exacte" de u par `solve`, puis en obtenir un DL par `series`.

Question 4.2. **Polynôme**

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $u(x) \in \mathbb{R}^+$ tel que $u(x)^5 + u(x)^2 + u(x) = x$.

2. Donner un développement asymptotique à trois termes de $u(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Question 4.3. Une suite

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 4.4. Maximum

Donner un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de :

$$\max_{0\leq x\leq n} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right)$$