TD Maple 5 : Matrices & Systèmes Linéaires

Michael Monerau

24 janvier 2011

1 Résolution de systèmes linéaires

On exprime un système linéaire de n équations à n inconnues sous la forme d'une équation matricielle $Ax = b$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Dans toute la suite, on suppose que le système linéaire accepte une unique solution, ie. $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on connaît l'unique solution du système : c'est $x = A^{-1}b$.

Cependant, calculer directement A^{-1} pour trouver la solution x introduit des problèmes d'instabilité numérique (les réels ne peuvent être représentés qu'avec une précision finie en mémoire, et les erreurs d'arrondis peuvent s'accumuler jusqu'à rendre le calcul *trop* faux).

Nous allons donc voir ici une méthode de résolution qui s'appuie sur la décomposition de A en un produit de matrices faciles à manipuler. Cette décomposition est plus communément appelée décomposition-LUP.

1.1 Cas particuliers

Commençons par voir deux cas particuliers de systèmes linéaires "faciles" à résoudre.

1.1.1 Triangulaire inférieure

Supposons ici que A est triangulaire inférieure.

Question 1.1. Résolution inférieure Écrire une procédure Maple `ResolInf` prenant en argument b et une telle matrice A, et qui retourne x. Vérifier sur un exemple.

1.1.2 Triangulaire supérieure

Supposons ici que A est triangulaire supérieure.

Question 1.2. Résolution supérieure Écrire une procédure Maple `ResolSup` prenant en argument b et une telle matrice A, et qui retourne x. Vérifier sur un exemple.

1.2 Objectif LUP

L'objectif est d'écrire A sous la forme $PA = LU$ avec :

- L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale
- U est une matrice triangulaire supérieure
- P est une matrice de permutation

On dit alors que le triplet (L, U, P) est la décomposition LUP de A.

Si on en dispose, on sait alors résoudre facilement le système. En effet, $Ax = b$ se réécrit $LUx = Pb$. Alors, posant $y = Ux$, y est obtenu en résolvant le système triangulaire inférieur $Ly = Pb$. Puis x est obtenu en résolvant le système triangulaire supérieur $Ux = y$.

Question 1.3. Résolution du système
Écrire une procédure Maple `SolveLUP` qui réalise ces opérations en prenant en arguments L, U, P et b.

Vérifier que la procédure fonctionne comme attendu en demandant à Maple la décomposition LUP d'une matrice inversible au hasard (cf. `MatrixDecomposition` du package `Student`).

1.3 Trouver la décomposition LUP

Pour trouver la décomposition LUP d'une matrice, on va utiliser le bien connu *pivot de Gauss*.

Le but est de transformer la matrice A sous une forme triangulaire supérieure sous l'action de transvections. Plus précisément, en supposant $a_{1,1} \neq 0$, on réalise l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$ sur la ligne i. Après cela, il n'y a donc plus que des 0 sous $a_{1,1}$. On procède alors de même à partir de $a_{2,2} \neq 0$ et ainsi de suite.

Après tout cela, on obtient une matrice U triangulaire supérieure. Si on écrit les opérations de transvection sous forme matricielle, on obtient $U = T_m \dots T_1\, A$ avec T_k la k^{eme} opération de transvection effectuée. Chaque T_k est triangulaire inférieure, tout comme T_k^{-1} et donc on obtient finalement $A = (T_1^{-1} \dots T_m^{-1})U$. Donc en posant $L = T_1^{-1} \dots T_m^{-1}$ on a bien $A = LU$ avec L triangulaire inférieure.

Cela fonctionne bien si tous les $a_{i,i}$ sont non-nuls (et alors $P = I_n$), mais dans le cas contraire on est bloqué. En réalité, vu qu'on suppose que A est inversible, il existe $j > i$ tel que $a_{j,j} \neq 0$ donc on peut permuter L_i avec L_j. Si on regroupe ces permutations de lignes dans une matrice de permutation P, on obtient finalement $PA = LU$.

Question 1.4. Pivot de Gauss

Implémenter une procédure Maple `TrouverLUP` qui réalise le pivot de Gauss sur une matrice inversible passée en argument, et qui retourne L, U et P.

Indication : Pour trouver L efficacement, regarder comment peuvent se simplifier les produits de transvection.

Vérifier votre procédure en utilisant `MatrixDecomposition` comme témoin.

1.4 Recoller les morceaux

Question 1.5. Résolution complète

Écrire une procédure `SolveLin` qui résout un système linéaire inversible.

Vérifier vos résultats en utilisant `solve` comme témoin.

2 Applications

2.1 Déterminant

A priori, calculer le déterminant d'une matrice est compliqué. En effet, la définition avec les permutations serait hautement inefficace à calculer, la formule de la comatrice n'aiderait pas non plus. Mais ici...

Question 2.1. Calcul du déterminant

Comment utiliser la décomposition LUP pour obtenir facilement le déterminant de A ?

Implémenter cela dans une fonction `DetParLUP` puis la vérifier en utilisant `Determinant` comme témoin.

2.2 Inverser une matrice

En calculant la décomposition LUP, on n'est pas très loin de calculer A^{-1}. Il suffit de remarquer que la décomposition ne dépend pas de b...

Question 2.2. Calcul de l'inverse

Comment obtenir l'inverse à partir de la décomposition LUP ?

Implémenter une procédure Maple `InverseMat` qui calcule l'inverse d'une matrice inversible.

2.3 Problème des moindres carrés

Dans l'approximation par les moindres carrés, on essaie de trouver une fonction dans un espace de dimension n qui passe le plus proche d'un certain nombre m de points, où la distance est prise au sens des *moindre carrés*.

Plus formellement, supposons qu'on dispose d'un échantillon $\langle (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \rangle$ de points où on sait que les y_i sont sujets à des erreurs de mesure. On aimerait trouver une fonction interpolante $F(x)$ telle que $y_i = F(x_i) + \eta_i$ pour $i = 1, \dots, m$ avec $||\eta|| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \eta_i^2}$ le plus petit possible.

Ici, on suppose que F est un polynôme de degré $n-1$, et donc il faut trouver ses n coefficients.

Pour que l'interpolation soit bonne, il faut avoir $m \gg n$ et espérer que le modèle soit bien en accordance avec les données. En tous les cas, on se retrouve avec un système sur-déterminé dont on veut approximer la solution.

Pour cela, on commence par poser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \dots & f_n(x_m) \end{pmatrix}$$

Puis avec le vecteur $c = (c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ où c_k est le coefficient (inconnu) de F de degré k, le problème se réécrit :

$$Ac = A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_m) \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'erreur effectuée par les mesures s'exprime $\eta = Ac - y$ et donc :

$$\begin{aligned} ||\eta||^2 &= ||Ac - y||^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} c_j - y_i \right)^2 \end{aligned}$$

Pour minimiser cette valeur, on annule la différentielle ce qui fournit après calcul le système en c : ${}^tAAc = {}^tAy$.

Si on suppose naturellement que A est de rang maximal, alors ${}^tAA$ est inversible et on peut donc appliquer les méthodes qu'on a vues jusque là.

Question 2.3. **Interpolation**
Écrire une procédure Maple `Interpol` qui trouve les coefficients c avec cette méthode et trace le tout sur un dessin (données et fonction interpolatrice).