

Transversalité et généricité

Michaël Monerau

TIPE 2007

Sous la direction de **Denis Choimet**

Plan

1	Sous-variétés, transversalité et généricité	1
1.1	Sous-variétés et espaces tangents	1
1.1.1	Sous-variétés	1
1.1.2	Espaces tangents	6
1.1.3	Quelques exemples de sous-variétés et d'espaces tangents	7
1.1.4	Applications et difféomorphismes de sous-variétés, appli- cations tangentes	13
1.2	Transversalité	14
1.2.1	Sous-variétés transverses et exemples	14
1.2.2	Applications transverses	16
1.2.3	Exemples	16
1.3	Généricité	18
2	Le théorème de transversalité	19
2.1	Le théorème de Sard	19
2.1.1	Mise en place et énoncé	19
2.1.2	Heuristique et idée de la démonstration	19
2.2	Le théorème de transversalité	20
2.2.1	Préliminaire	20
2.2.2	Énoncé et heuristique du théorème	22
2.2.3	Preuve du théorème	23
2.3	Des applications directes	24
2.3.1	Généricité de la transversalité	25
2.3.2	Le théorème de Sard revisité	26
3	Application aux fonctions de Morse	27
3.1	Points et fonctions de Morse	27
3.1.1	Différentielle seconde	27
3.1.2	Points de Morse	27
3.1.3	Fonction de Morse	28
3.2	Énoncé et preuve du théorème	29
3.2.1	Énoncé	29
3.2.2	Preuve du théorème	29
3.3	Un corollaire frappant	30
	Références	31
	Contacts	31

Présentation

Dans l'étude de problèmes mathématiques complexes, l'étude de certains sous-ensembles spécifiques s'avère parfois beaucoup plus simple que celle du cas général. Il est alors naturel de se demander si l'étude de ces cas "suffit" à obtenir une vision assez représentative de la situation globale.

C'est ainsi que naît l'idée de *généricité*. En effet, on désigne sous ce terme l'idée intuitive de "situation typique". Comme nous le verrons, la formalisation de cette notion est à la fois intéressante et spectaculaire. Elle fait intervenir de très beaux raisonnements de géométrie différentielle dont la portée est insoupçonnée.

C'est principalement Hassley Whitney et René Thom qui ont initié ce domaine de recherche dans la seconde partie du XX^{ème} siècle. On doit à Whitney nombre de théorèmes fins et difficiles, tandis que Thom a apporté, notamment avec son théorème de transversalité, les outils essentiels pour les développements futurs de la théorie.

Cette théorie a trouvé son application directe en physique. En effet, l'étude menée abstraitement par les mathématiciens s'avère très fertile lorsqu'elle est appliquée dans les espaces de phases de systèmes physiques à plusieurs paramètres. Un point dans un tel espace définit un état du système, et déduire des faits sur l'ensemble de tels points permet évidemment d'obtenir des résultats très forts sur les systèmes eux-mêmes.

Par nature même, ces études mènent à des résultats plus **qualitatifs que quantitatifs**. Il n'est donc nullement question d'espérer prévoir précisément les comportements de systèmes, mais plutôt d'obtenir des résultats sur leurs caractéristiques globales.

Notre étude commence par la mise en place de notions élémentaires de géométrie différentielle dont nous avons besoin par la suite, puis par la présentation des formalisations de la transversalité et de la généricité. Armés de ces outils, nous abordons le théorème de transversalité en faisant un détour nécessaire par le théorème de Sard. Enfin, nous nous attardons sur une application remarquable du théorème de transversalité concernant les fonctions de Morse.

1 Sous-variétés, transversalité et généricité

Comme annoncé dans l'introduction, nous devons nous attacher à introduire trois nouvelles notions. La première est le concept de **sous-variété** qui va permettre d'envisager un spectre très large d'objets mathématiques. La deuxième est la **transversalité**, qui formalise l'idée d'indépendance, d'intersection franche entre des sous-variétés. Enfin, la troisième est la **généricité**, qui traduit l'intuition du "vrai presque partout".

Dans toute cette étude, on se place dans l'espace ambiant \mathbb{R}^n , où $n \in \mathbb{N}^*$. Cela simplifiera à la fois l'appréhension des assertions et la visualisation des résultats. On désignera les coordonnées sur la base canonique d'un élément x de \mathbb{R}^n par (x_1, \dots, x_n) , et celles d'une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^n par $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Nous serons amenés à considérer de nombreux voisinages ouverts. Fixons une notation à la fois pratique et concise. L'ensemble des voisinages ouverts d'un point a relatifs à un espace E ($a \in E$) sera noté : $\mathbb{V}_E(a)$. Ainsi, pour fixer un voisinage ouvert U de a dans E , il suffit de lire $U \in \mathbb{V}_E(a)$.

1.1 Sous-variétés et espaces tangents

1.1.1 Sous-variétés

Le concept de *sous-variété* est une généralisation de la notion bien connue de sous-espace vectoriel à un cas plus complexe où "tout n'est pas linéaire", afin de décrire une classe beaucoup plus large d'objets mathématiques. L'idée en est intuitive : il faut penser à une nappe paramétrée en dimension n , vue informellement comme une copie "tordue" d'un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^p (pour un certain p , ne cherchons pas à être trop précis). L'exemple le plus illustratif est certainement celui d'une surface dans \mathbb{R}^3 . D'ailleurs, nous ne manquerons pas de faire appel à notre intuition géométrique tout au long de cette étude.

Dans cette optique de généralisation, le premier outil est paradoxalement la *localisation*. Un des faits essentiels est que les situations doivent être considérées localement (*ie.* sur des voisinages ouverts qu'on ne contrôle *a priori* pas) et non plus globalement. Là où un sous-espace vectoriel peut être défini *globalement* par un système d'équations linéaires (comme intersection des hyperplans qui le contiennent), on va demander qu'une sous-variété soit définie *localement* par des équations C^1 . La puissance de ce type de définition réside dans le fait que les équations peuvent différer d'un endroit à l'autre de la sous-variété. On obtient donc une structure à la fois souple et régulière.

En réalité, il est pratique de disposer de plusieurs définitions équivalentes des sous-variétés, afin de rendre plus aisée leur manipulation. Nous énonçons d'abord ces définitions, pour montrer ensuite que ces assertions sont bien toutes équivalentes entre elles.

[1.A] DÉFINITION (Sous-variété en un point)

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $d \in \mathbb{N}^*$. On dit que V est une sous-variété de \mathbb{R}^n en a , de dimension d , si l'une des quatre conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. Redressement linéaire

il existe $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$, et un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme $F : U \rightarrow F(U)$, avec $F(U) \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(0)$, qui redresse V sur \mathbb{R}^d :

$$F(U \cap V) = \underbrace{\mathbb{R}^d \times \{0\}}_{\subset \mathbb{R}^n} \cap F(U)$$

2. Equations locales

il existe $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$, et une fonction \mathcal{C}^1 $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ tels que $df_{(a)}$ soit surjective et :

$$x \in V \cap U \iff x \in U \text{ et } f(x) = 0$$

3. Graphe

il existe $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$, $U' \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^d}(a_1, \dots, a_d)$, et une fonction \mathcal{C}^1 $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ tels que (éventuellement après permutation des coordonnées) :

$$x \in V \cap U \iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in U' \\ (x_{d+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

4. Coordonnées locales

il existe $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$, $\Omega \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^d}(0)$, et une fonction \mathcal{C}^1 $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que φ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$, $a = \varphi(0)$, et que $d\varphi_{(0)}$ soit injective.

On en déduit immédiatement la définition d'une sous-variété :

[1.B] DÉFINITION (Sous-variété)

Soit $V \subset \mathbb{R}^n$. On dit que V est une sous-variété de \mathbb{R}^n si c'est une sous-variété en chacun de ses points.

Signalons ici que l'on autorise une sous-variété à ne pas avoir même dimension en chacun de ses points. Cependant, un argument "d'ouvert fermé dans un connexe par arcs" montre que la dimension reste constante sur chaque composante connexe par arcs de la sous-variété. Ainsi, nous considérerons dans la suite seulement des sous-variétés de dimension constante, notée $\dim V$, quitte à considérer les composantes connexes par arcs indépendamment.

La figure 1 illustre la première définition et montre que cette définition formalise bien l'idée de "sous-espace vectoriel tordu par difféomorphisme".

Il est intéressant de s'attarder quelque peu sur [1.A].2 afin d'expliquer pour-

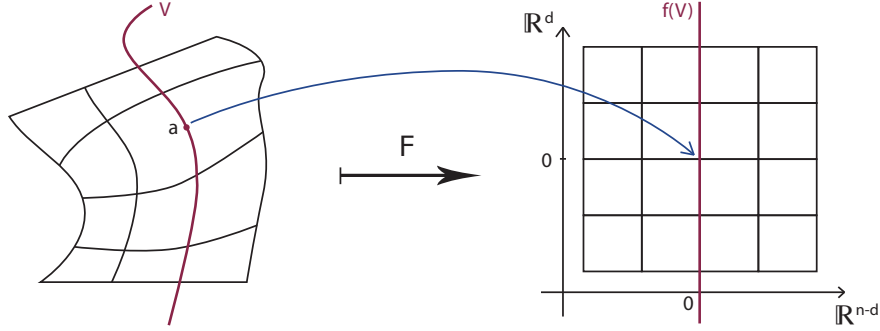


Figure 1: Redressement linéaire d'une sous-variété

quoi cette vision traduit la notion d'équations locales, annoncée plus haut. En reprenant les notations, on peut écrire $f = (f_1, \dots, f_{n-d})$ ou $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$. Alors les deux conditions de l'énoncé se traduisent aisément : $(df_{1(a)}, \dots, df_{n-d(a)})$ est libre et $V \cap U = \{x \in U \mid \forall i \in \{1 \dots n-d\}, f_i(x) = 0\}$. Ainsi, V est bien exprimée localement comme lieu d'annulation de $n-d$ fonctions \mathcal{C}^1 indépendantes. Cette indépendance est à prendre au sens de "ont leurs différentielles indépendantes". C'est l'aspect essentiel pour un comportement local, puisque le théorème d'inversion locale nous dit que l'on peut compléter cette famille pour en faire un difféomorphisme local de U dans un ouvert de \mathbb{R}^n , preuve, s'il en est, de leur indépendance (infinitésimale).

Passons à la preuve de l'équivalence.

PREUVE DE [1.A].

Afin d'alléger l'écriture, on reprend exactement les notations de la définition sans les préciser.

• **1 \implies 2 :**

Notons $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de la base canonique. Alors $\mathbb{R}^d \times \{0\} = \bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^*$. Ainsi,

$$F(V \cap U) = \bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^* \cap F(U)$$

D'où (F est bijective) :

$$\begin{aligned} V \cap U &= F^{-1} \left(\bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^* \cap F(U) \right) \\ &= F^{-1} \left(\bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^* \right) \cap U \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} x \in F^{-1} \left(\bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^* \right) &\iff F(x) \in \bigcap_{i=d+1}^n \text{Ker } e_i^* \\ &\iff \forall i \in \{d+1 \dots n\}, e_i^*(F(x)) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, posons pour i de $d+1$ à n , $f_i = e_i^* \circ F$. On obtient par ce qui précède :

$$V \cap U = \{x \in U \mid \forall i \in \{d+1 \dots n\}, f_i(x) = 0\}$$

Et on calcule que $df_{i(a)} = de_{i(0)}^* \circ dF_{(a)}$. Or, les $de_{i(0)}^*$ sont indépendantes par choix, composées à $dF_{(a)}$ qui est inversible puisque F est un difféomorphisme local en a . Donc les $df_{i(a)}$ sont indépendantes, et l'implication est montrée en posant $f = (f_{d+1}, \dots, f_n)$.

• **2** \implies **3** :

C'est une conséquence du théorème des fonctions implicites. Pour le voir, posons la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ définie par ses composantes $f = (f_1, \dots, f_{n-d})$.

Par définition, $f(a) = 0$ et la jacobienne en a de f est :

$$Jac_a f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_d f_1(a) & \partial_{d+1} f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{n-d}(a) & \dots & \partial_d f_{n-d}(a) & \partial_{d+1} f_{n-d}(a) & \dots & \partial_n f_{n-d}(a) \end{pmatrix}$$

D'après les hypothèses de \mathcal{Q} , on sait que cette matrice est de rang $n-d$. Ainsi, quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que les $n-d$ dernières colonnes forment une matrice carrée inversible. Alors, le théorème des fonctions implicites fournit $V \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^d}(a_1, \dots, a_d)$ et $W \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^{n-d}}(a_{d+1}, \dots, a_n)$ tels que $V \times W \subset U$ et qu'il existe $g : V \longrightarrow W$ \mathcal{C}^1 vérifiant :

$$x \in V \times W, f(x) = 0 \iff \begin{cases} (x_1, \dots, x_d) \in V \\ (x_{d+1}, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

On obtient donc exactement l'assertion \mathcal{B} .

• **3** \implies **4** :

Essentiellement, il suffit de translater g (à l'arrivée, il faut un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n). Pour cela, posons :

$$\Omega = \{(x_1 - a_1, \dots, x_d - a_d) \mid (x_1, \dots, x_d) \in U'\} \subset \mathbb{R}^d$$

On définit alors $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pour $u \in \Omega$:

$$\begin{cases} \varphi_1(u) & = & u_1 + a_1 \\ & \vdots & \\ \varphi_d(u) & = & u_d + a_d \\ \varphi_{d+1}(u) & = & g_1(u_1 + a_1, \dots, u_d + a_d) \\ & \vdots & \\ \varphi_n(u) & = & g_{n-d}(u_1 + a_1, \dots, u_d + a_d) \end{cases}$$

Ainsi définie, $\varphi(0) = a$ et φ est clairement \mathcal{C}^1 . De plus, $\text{rg}(d\varphi_{(0)}) \geq d$ (voir les d premières équations). Donc $\text{rg}(d\varphi_{(0)}) = d$, puisque son rang ne peut excéder la dimension de l'espace de départ : d .

Par \mathcal{B} , on sait que $\varphi(\Omega) = V \cap U$. De plus, on peut clairement définir $\varphi^{-1} : V \cap U \longrightarrow \Omega$ à partir des premières coordonnées, visiblement continûment en u . Donc φ est un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$.

4 est donc prouvée.

• 4 \implies 1 :

Cette implication est certainement la plus compliquée des quatre. Ici, il ne suffit pas de manipuler les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Il faut en effet réduire φ dans un repère curviligne approprié, et prendre pour difféomorphisme dans 1 la fonction de changement de repère.

Dans la suite, on appellera *immersion* toute fonction de différentielle injective (voir plus bas pour des définitions exactes). Ici, c'est purement une question de vocabulaire. Il faut alors utiliser le théorème de forme normale des immersions :

[1.C] LEMME

A un changement de coordonnées près (à l'arrivée), localement, il n'y a qu'une seule immersion de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^n ($d \leq n$) : l'injection canonique.

Acceptant ce lemme provisoirement, montrons le résultat. On obtient alors le diagramme commutatif suivant, où $\kappa : (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$ désigne l'injection canonique et ψ le changement de coordonnées du lemme (à l'arrivée) :

$$\begin{array}{ccc} x \in \Omega & \xrightarrow{\varphi} & V \cap U \subset \mathbb{R}^n \\ & \searrow \kappa & \uparrow \psi \\ & & X \in \Omega \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Plus précisément, il existe $W \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(\kappa(a))$ tel que ψ soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de W sur $\psi(W)$. Donc ψ^{-1} est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $\psi(W)$ sur W .

Le diagramme commutatif donne :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ \varphi(\Omega) &= \psi^{-1}(V \cap U) \\ &= \kappa(\Omega) \\ &= \Omega \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \\ &= \psi^{-1}(U) \cap (\Omega \times \{0\}) \end{aligned}$$

La dernière égalité mérite une explication :

◇ \supset est évidente

◇ \subset : si $X \in \Omega \times \{0\}$, alors $X \in \psi^{-1}(V \cap U)$, et donc, $X \in \psi^{-1}(U)$.

Finalement, on vient donc de prouver que ψ^{-1} est un difféomorphisme qui vérifie les hypothèses de 1. Cette implication est donc démontrée. Revenons maintenant sur la preuve du lemme.

PREUVE DE [1.C].

Posons les notations et les objectifs clairement.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \mathcal{C}^1$ ($d \leq n$), $a \in U$. $df_{(a)}$ est injective.

Montrons alors qu'il existe $W \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(\kappa(a))$ et un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme ψ de W sur $\psi(W)$ tel que $f = \psi \circ \kappa$ sur Ω (voir le diagramme commutatif ci-dessus).

On sait que $\text{rg}(df_{(a)}) = d$, donc quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que les d premières colonnes de la jacobienne de f en a forment une matrice carrée $d \times d$ inversible, qu'on notera J' . On pose alors $\psi : U \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \psi_1(x) &= f_1(x_1, \dots, x_d) \\ &\vdots \\ \psi_d(x) &= f_d(x_1, \dots, x_d) \\ \psi_{d+1}(x) &= f_{d+1}(x_1, \dots, x_d) + x_{d+1} \\ &\vdots \\ \psi_n(x) &= f_n(x_1, \dots, x_d) + x_n \end{cases}$$

Alors, de par cette définition, on obtient :

$$Jac_{\kappa(a)}\psi = \left(\begin{array}{c|c} J' & 0 \\ \hline * & \mathbb{I}_{n-d} \end{array} \right)$$

où \mathbb{I}_{n-d} désigne le bloc identité de taille $n - d$. Ainsi la jacobienne de ψ en $\kappa(a)$ est inversible, ce qui fait de ψ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme local d'un ouvert $W \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(\kappa(a))$ sur son image, par le théorème d'inversion locale. Et on vérifie immédiatement qu'on a bien la relation voulue :

$$f = \psi \circ \kappa \text{ valable sur } \kappa^{-1}(W) \cap U$$

□

1.1.2 Espaces tangents

Etant donné que les sous-variétés que l'on vient de définir sont des objets très lisses, il est naturel d'étudier leur structure tangente.

Munissons-nous d'une sous-variété V de \mathbb{R}^n et d'un point $a \in V$. On pose alors la :

[1.D] DÉFINITION (Espace tangent)

On appelle espace tangent à V en a l'ensemble des vecteurs vitesse en a des chemins tracés sur V passant par a . Ce sous-espace vectoriel de E est noté $\mathcal{T}_a V$. C'est la meilleure approximation linéaire de V autour de a .

Cette définition généralise l'intuition de plan tangent qu'on a en dimension 3, par exemple, comme l'illustre la figure 2. On préfère souvent représenter l'espace tangent affine, passant effectivement par le point $a : a + \mathcal{T}_a V$.

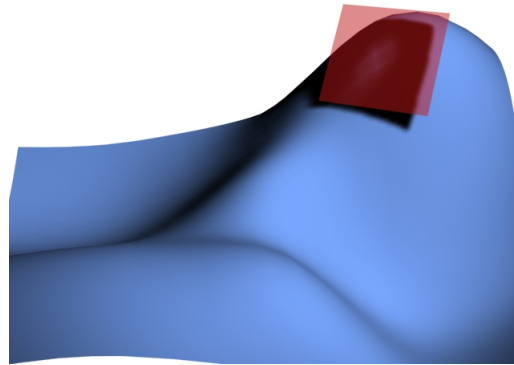


Figure 2: Un plan tangent en dimension 3

Nous accepterons le théorème suivant, qui relie la structure tangente aux diverses définitions que l'on a données des sous-variétés :

[1.E] THÉORÈME (Lien Définition - Espace tangent)

Avec les notations de [1.A] :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a V &= \text{Ker } df_{(a)} \\ &= \text{graphe de } dg_{(a_1, \dots, a_d)} \\ &= \text{Im } d\varphi_{(0)} \end{aligned}$$

Sa preuve est simplement l'écriture des définitions et la dérivation des composées.

Remarque 1.

Au passage, ce théorème nous dit que $\dim \mathcal{T}_a V = \dim V$.

1.1.3 Quelques exemples de sous-variétés et d'espaces tangents

Après avoir défini la notion de sous-variété, illustrons nos propos avec quelques exemples simples.

1.1.3.1 Sous-variétés de niveau

La sous-variété la plus simple à laquelle on peut penser serait une sous-variété définie localement par une seule équation. Cependant, ceci n'étant pas trépidant, il nous faut chercher à créer un ensemble plus complexe. Par exemple, on peut se tourner vers une fonction non plus à valeurs dans \mathbb{R} mais dans \mathbb{R}^n . Ainsi, une seule équation locale sur la fonction demande la vérification de n équations locales. Il est alors intéressant de déterminer dans quels cas l'ensemble ainsi défini est une sous-variété. Formalisons.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($n \geq p$) une fonction \mathcal{C}^1 . On pose alors l'ensemble $V_y = h^{-1}(\{y\})$ pour $y \in \mathbb{R}^p$. Quand est-ce que V_y est une sous-variété ? Dans ce cas, quel est son espace tangent ?

Pour cela, commençons par poser la :

[1.F] DÉFINITION (Point et valeur critique)

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application \mathcal{C}^1 (où $n \geq p$).

On dit que $x \in U$ est un point critique de f si $df_{(x)}$ n'est pas surjective.

$y \in \mathbb{R}^p$ est une valeur critique de f si c'est l'image par f d'un point critique. Dans le cas contraire, y est une valeur régulière.

Remarque 2.

Notons que dans cette définition, on considère les valeurs hors de l'image de f comme régulières.

On peut alors énoncer la proposition suivante qui traduit le fait que la surjectivité de $dh_{(x)}$ en tous les points x tels que $h(x) = y \in \mathbb{R}^p$ donne des équations "assez indépendantes" pour permettre à V_y d'être une sous-variété :

[1.G] PROPOSITION (Sous-variété de niveau)

Si y n'est pas une valeur critique de h , alors $V_y = h^{-1}(\{y\})$ est une sous-variété de dimension $n - p$.

Remarque 3.

La réciproque est fautive comme on le voit en considérant $h : x \mapsto x^3$ en 0.

PREUVE DE [1.G].

C'est simplement une reformulation de la deuxième forme de la définition.

Supposons que y ne soit pas une valeur critique de h et que $V_y \neq \emptyset$ (sinon V_y est la sous-variété vide). Pour montrer que V_y est alors une sous-variété, il nous faut travailler, par nature, localement, *ie.* nous allons montrer que V_y est une sous-variété en chacun de ses points.

Soit $x \in V_y$ et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x)$. Si on définit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ par : $f(x) = h(x) - y$, alors $V_y \cap U$ est le lieu d'annulation de f . Or, $df_{(x)}$ est surjective par hypothèse (c'est ici qu'intervient la surjectivité en *chacune* des préimages de y). Donc la deuxième version dans [1.A] donne que V_y est une sous-variété en x de dimension $n - p$.

□

Le temps est maintenant venu de chercher l'espace tangent à V_y en chacun de ses points, lorsque y n'est pas une valeur critique. D'après [1.E], on peut affirmer que l'espace tangent à V_y en $x \in V_y$ est $\mathcal{T}_x V_y = \text{Ker } dh_{(x)}$ et que

$$\dim \mathcal{T}_x V_y = n - p.$$

Concrètement, cela prouve par exemple que la sphère unité dans \mathbb{R}^n est une sous-variété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, si on pose $h : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}$, alors sa différentielle est $dh_{(x)}(h) = 2 \langle x, h \rangle$ ($h \in \mathbb{R}^n$, et \langle, \rangle est le produit scalaire canonique). Ainsi sa seule valeur critique est 0, et la sphère unité est $S^{n-1} = h^{-1}(\{1\})$, donc une sous-variété de dimension $n - 1$ par [1.G]. On en déduit également que l'espace tangent en x à S^{n-1} est

$$\{h \in \mathbb{R}^n \mid \langle h, x \rangle = 0\} = x^\perp$$

ce qui est bien conforme à notre intuition en dimension 2 et 3 (voir figure 3).

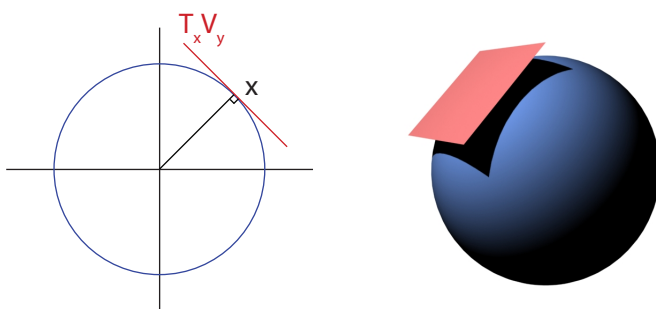


Figure 3: Représentations de S^1 et S^2 , avec des espaces tangents (affines)

1.1.3.2 $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$

Mais cette théorie géométrique ne se limite étonnamment pas à \mathbb{R}^n , et c'est d'ailleurs là toute sa puissance. En effet, on peut faire apparaître ces notions très visuelles dans des espaces où on n'y est pas accoutumé. Ici, plaçons-nous dans l'espace ambiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par isomorphisme avec \mathbb{R}^{n^2} (on n'utilisera pas la structure euclidienne), la théorie ci-dessus s'y transpose sans modification.

Maintenant, observons quelques instants $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$. Est-ce une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? La réponse est oui. En effet, “ $\det M = 1$ ” est une équation qui va s'avérer assez régulière pour définir globalement une sous-variété.

On sait que la différentielle du déterminant est :

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad d\det_{(M)}(H) = \det M \operatorname{Tr}(M^{-1}H)$$

Ainsi, pour $M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$, $d\det_{(M)} \neq 0$. Donc par la deuxième définition de [1.A], on peut conclure que $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ (car $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété locale en chacun de ses points).

L'espace tangent se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathbf{SL}_n(\mathbb{R}), \quad \mathcal{T}_M(\mathbf{SL}_n(\mathbb{R})) &= \operatorname{Ker}(d\det_{(M)}) \\ &= \{MH \mid \operatorname{Tr} H = 0\} \\ &= M \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr}) \end{aligned}$$

1.1.3.3 $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$

Dans le même ordre d'idée, on peut appliquer le même raisonnement à $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$. Il faut cependant un petit peu le raffiner car la dimension étant supérieure à 1, il faut vraiment vérifier la surjectivité de la différentielle de l'équation ${}^tMM = \mathbb{I}_n$ définissant ce groupe.

Or, si on pose f à valeur dans le sous-espace des matrices symétriques :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto {}^tMM \end{cases}$$

$\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est défini par l'équation $f(M) = \mathbb{I}_n$, et la surjectivité s'obtient par calcul. En effet, on remarque que pour $Y \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$, on a $df_{(M)}(\frac{MY}{2}) = Y$. Par le même raisonnement que ci-dessus, on conclut que $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

1.1.3.4 Non-exemple

Afin de mieux se rendre compte de la signification réelle du caractère lisse d'une sous-variété, exhibons maintenant un ensemble qui *n'est pas* une sous-variété.

Dans le but d'illustrer deux raisons pour lesquelles un ensemble peut ne pas être une sous-variété, nous allons considérer $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$.

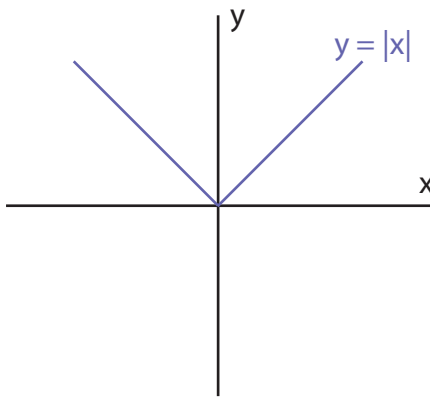


Figure 4: Représentation de l'ensemble $y = |x|$

Bien sûr, c'est en 0 que le problème survient, puisque $X \setminus \{0\}$ est clairement une sous-variété. Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer que X ne peut être une sous-variété localement en 0. Supposons donc que X soit une sous-variété en 0 et que :

- **X soit de dimension 2** : dans ce cas, un argument topologique permet de conclure. Si on prend la définition 4 dans [1.A], on dispose d'un homéomorphisme φ de $\Omega \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^2}(0)$ sur $X \cap U$ où $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^2}(0)$, et $\varphi(0) = 0$. Ainsi,

on peut en déduire que $X \cap U \setminus \{0\}$ et $\Omega \setminus \{0\}$ sont homéomorphes. Mais ces deux ensembles n'ont pas le même nombre de composantes connexes par arcs (respectivement 2 et 1). C'est donc absurde.

• **X soit de dimension 1** : cette fois-ci, on est dans le cas où, intuitivement, la dimension pourrait convenir. Il faut donc un argument moins grossier que le précédent. On voit bien qu'en 0, c'est le caractère lisse qui manque. L'argument va donc être de nature différentielle.

Traduisons la définition 1 de [1.A]. On a donc $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^2}(0)$ et $F : (x, y) \mapsto (u, v)$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur $F(U)$, qui transforme X en la droite $v = 0$. On peut alors écrire $F^{-1}(u, 0) = (x, |x|)$ pour u assez petit et x correspondant, d'où $(F^{-1})_2(u, 0) = |(F^{-1})_1(u, 0)|$. Ainsi, en calculant le taux de variation et en laissant tendre u vers 0^+ et 0^- , on obtient :

$$\partial_1 (F^{-1})_2(0, 0) = |\partial_1 (F^{-1})_1(0, 0)| = -|\partial_1 (F^{-1})_1(0, 0)|$$

Donc :

$$\partial_1 (F^{-1})_1(0, 0) = \partial_1 (F^{-1})_2(0, 0) = 0$$

Mais alors la jacobienne de F^{-1} n'est pas inversible en 0. C'est absurde car F^{-1} est un difféomorphisme local en 0.

Finalement, on a donc montré que X ne peut être une sous-variété de dimension ni 1 ni 2 (ni 0 évidemment). Ce n'est donc pas une sous-variété.

1.1.3.5 Définition par homéomorphisme + immersion

Essayons maintenant de définir une sous-variété de \mathbb{R}^2 à l'aide de la quatrième définition, *ie.* en construisant un homéomorphisme qui est aussi une immersion. Et nous allons par là-même voir à quoi "sert" l'hypothèse essentielle d'homéomorphisme.

Considérons d'abord l'immersion (*ie.* $d\varphi_{(t)}$ est injective en tout t) suivante :

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (\cos t, \sin 2t) \end{cases}$$

L'image C par φ_1 de l'ouvert $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[$ est la courbe présentée en figure 5.

Un argument topologique comme ci-dessus montre immédiatement que cette courbe n'est pas une sous-variété en 0, malgré ses apparences lisses. Le problème vient du fait que φ_1 n'est pas un homéomorphisme local autour de 0. C'est bien une bijection, mais un voisinage de 0 dans $\varphi_1(I)$ provient de valeurs de t proches de $-\frac{\pi}{2}$, de $\frac{3\pi}{2}$, et même de $\frac{\pi}{2}$. Cela interdit à $(\varphi_1)^{-1}$ d'être continue.

Afin d'éviter ce problème en 0, on peut "déplier" la courbe à l'aide d'une troisième dimension pour s'écarter du voisinage de 0 initial en hauteur. Cela mène à considérer l'immersion suivante :

$$\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (\cos t, \sin 2t, t) \end{cases}$$

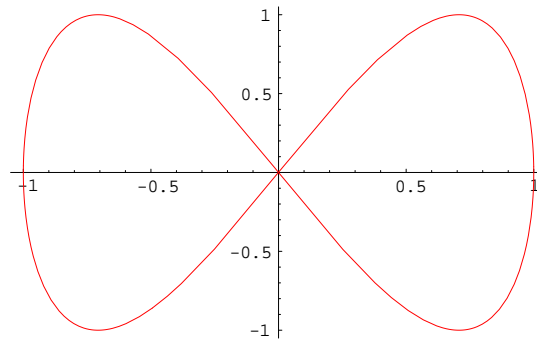


Figure 5: Image de $\varphi_1 : t \mapsto (\cos t, \sin 2t)$

Comme le montre la figure 6, cette nouvelle fonction est bien un “dépliage” de la précédente. $(\varphi_2)^{-1}$ s’exprime trivialement à l’aide de la troisième coordonnée, ce qui permet de dire que φ_2 est un homéomorphisme. *A fortiori*, c’est un homéomorphisme local en chaque point de la courbe, et donc la quatrième définition de [1.A] permet de conclure que $\varphi_2(I)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^3 .

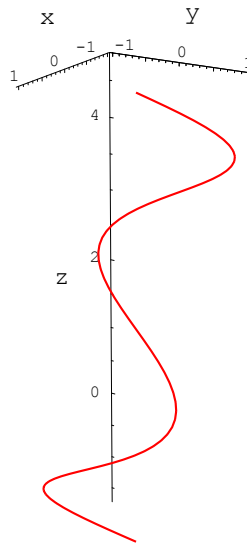


Figure 6: Image de $\varphi_2 : t \mapsto (\cos t, \sin 2t, t)$

1.1.4 Applications et difféomorphismes de sous-variétés, applications tangentes

Un des intérêts des sous-variétés réside dans le fait que l'on peut transposer tout le calcul différentiel qu'on a l'habitude de faire sur les espaces vectoriels "droits" dans ce nouvel environnement, à condition de passer toujours à la structure tangente sous-jacente, *ie.* les espaces tangents. On acceptera ici que ce passage se fait sans encombres, conservant ainsi la règle de la chaîne et les règles de calcul usuelles, à condition de passer dans les espaces tangents à chaque dérivation.

Plus formellement, il faut définir précisément ce qu'est une application régulière partant d'une sous-variété. En effet, la définition usuelle pour les applications C^k fait intervenir un ouvert au départ. Un tel point de vue est prohibé dans le cadre des sous-variétés, car elles ne sont elles-mêmes pas ouvertes en général (voir les exemples ci-dessus).

On adopte alors un point de vue plus global, qui consiste en la :

[1.H] DÉFINITION (Application C^k de sous-variété)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application. On dit que f est C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), s'il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant V et une application $f_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ C^k (au sens usuel) qui prolonge f sur U , *ie.* telle que $f = f_0|_V$.

La définition d'un C^k -difféomorphisme suit alors naturellement :

[1.I] DÉFINITION (C^k -difféomorphisme de sous-variétés)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n et W une sous-variété de \mathbb{R}^p . Soit $f : V \rightarrow W$ une application. On dit que f est un C^k -difféomorphisme de V sur W si f est C^k , bijective, et si f^{-1} est C^k (comme d'habitude, on peut remplacer ce dernier C^k par C^1).

Remarque 4.

La définition donnée ci-dessus d'un difféomorphisme de sous-variétés $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ n'oblige pas $n = p$, mais seulement $\dim V = p$, car on peut voir que pour $x \in V$, $\mathcal{T}_x f$ est un isomorphisme de $\mathcal{T}_x V$ (de dimension $\dim V$) sur \mathbb{R}^p .

Alors, il ne reste qu'à définir l'application tangente comme suit, en remarquant au passage qu'elle correspond bien à la différentielle usuelle d'une fonction lorsqu'on part d'un ouvert d'un espace vectoriel :

[1.J] DÉFINITION (Application tangente)

Soient une sous-variété V de \mathbb{R}^n , et une application \mathcal{C}^1 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$. On appelle application tangente de f à V en $a \in V$ la restriction de $df_{(a)}$ à $\mathcal{T}_a V$. On la note $\mathcal{T}_a f$:

$$\mathcal{T}_a f : \left| \begin{array}{l} \mathcal{T}_a V \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x \mapsto df_{(a)}(x) \end{array} \right.$$

Ces notions ont ceci d'agréable qu'elles généralisent aux sous-variétés, qui sont des espaces tordus, l'aisance de manipulation que nous offre le calcul différentiel dans des ouverts d'espaces vectoriels.

On pose alors quelques vocables utiles :

[1.K] DÉFINITION (Immersion et submersion)

Soient $f : V \rightarrow W$ où V et W sont des sous-variétés de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p , $a \in V$. On dit que f est une immersion (resp. submersion) en a si $\mathcal{T}_a f$ est injective (resp. surjective).

f est une immersion (resp. submersion) si c'est une immersion (resp. submersion) en tout point de V .

Remarque 5.

Les points 2 et 4 de [1.A] s'expriment ainsi facilement : f est une submersion en a , et φ est une immersion en 0.

1.2 Transversalité**1.2.1 Sous-variétés transverses et exemples**

Dans la suite de notre étude, les critères d'indépendance des fonctions, pré-munissant de dégénérescences pathologiques, s'appuieront sur une idée essentielle : *la transversalité*.

La notion de transversalité entre des sous-espaces vectoriels traduit l'idée intuitive que leur intersection n'est pas "baveuse". Pour cela, on pose les définitions suivantes :

[1.L] DÉFINITION (Sous-espaces vectoriels transverses)

Soient T_1 et T_2 deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . On dit que T_1 et T_2 sont transverses, et on note $T_1 \bar{\cap} T_2$, si

$$\text{codim}_{\mathbb{R}^n}(T_1) + \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(T_2) = \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(T_1 \cap T_2)$$

Remarque 6.

On peut reformuler plus simplement l'égalité des codimensions sous la forme équivalente : $\mathbb{R}^n = T_1 + T_2$.

On étend cette définition aux sous-variétés en passant à la structure linéaire sous-jacente, j'ai nommé l'espace tangent. De même, la notion traduit l'idée que l'intersection est franche, sans affleurement, comme le montrent les illustrations de la figure 7.

[1.M] DÉFINITION (Sous-variétés)

Soient V_1 et V_2 deux sous-variétés de \mathbb{R}^n . On dit que V_1 et V_2 sont transverses, et on note $V_1 \bar{\cap} V_2$, si

$$\forall a \in V_1 \cap V_2, \quad \mathcal{T}_a V_1 \bar{\cap} \mathcal{T}_a V_2$$

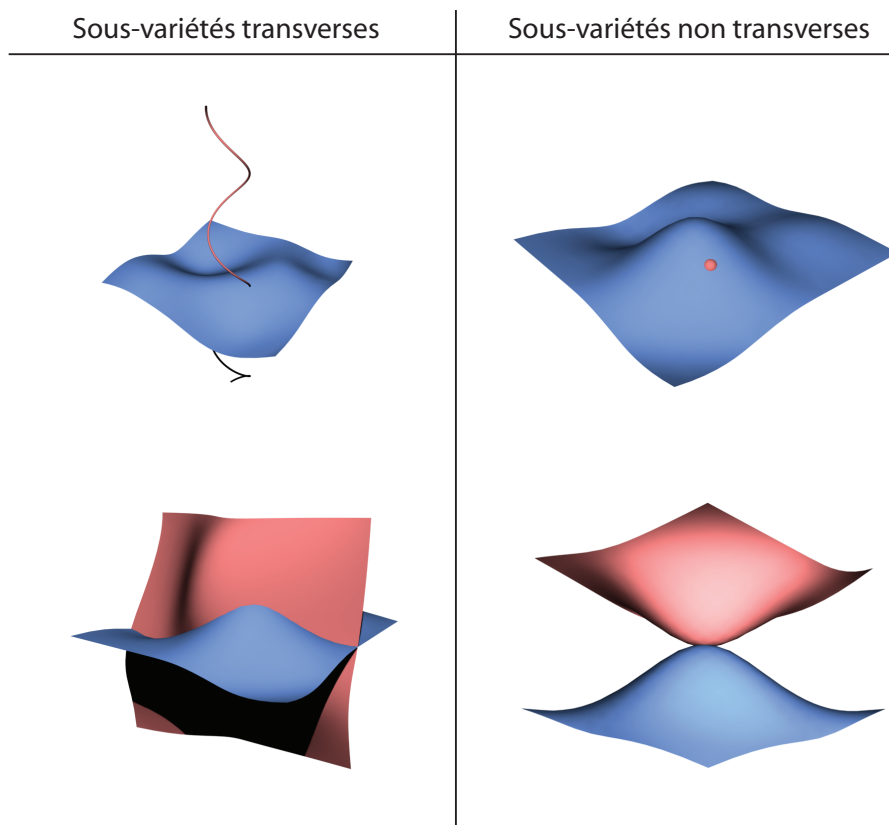


Figure 7: Quelques sous-variétés transverses ou non

Remarque 7.

Attention, la notion de transversalité dépend de l'espace ambiant. Par exemple, deux droites coplanaires sont transverses vues dans le plan, mais non transverses vues dans l'espace.

1.2.2 Applications transverses

La notion de transversalité s'étend alors aux applications de sous-variétés. C'est sous cette forme que nous allons l'utiliser afin d'exprimer les conditions d'indépendance.

Pour ceci, on pose la :

[1.N] DÉFINITION (*Application transverse*)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , W une sous-variété de \mathbb{R}^p ,
 $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in V$.

On dit que f est transverse à W en a si $f(a) \notin W$, ou bien si $f(a) \in W$ et $\text{Im } \mathcal{T}_a f$ est transverse à $\mathcal{T}_{f(a)} W$.

On dit bien sûr que f est transverse à W (resp. sur une partie A de V) si elle l'est en tout point de V (resp. de A).

1.2.3 Exemples

Il est temps de donner des exemples d'applications transverses afin de développer notre intuition.

1.2.3.1 Deux exemples de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Dans le cas d'ouverts, on voit que les définitions ci-dessus se ramènent à des notions bien connues. Par exemple, si on considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mathcal{C}^1$ et la fonction $g_f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}_x g_f$ n'est autre que $h \mapsto (h, \text{d}f_x(h) = f'(x) \cdot h)$. Son image est donc la droite vectorielle tangente au graphe de f en x .

Ainsi, géométriquement, si on prend pour W l'axe des abscisses (qui est bien une sous-variété de \mathbb{R}^2), g_f est transverse à W si et seulement si en tout point où le graphe de f rencontre l'axe des abscisses, sa tangente coupe (Ox) transversalement, *ie.* n'est pas horizontale.

On peut donc dire que pour $f(x) = x$, g_f est transverse à W , mais pour $f(x) = x^2$, g_f ne l'est pas.

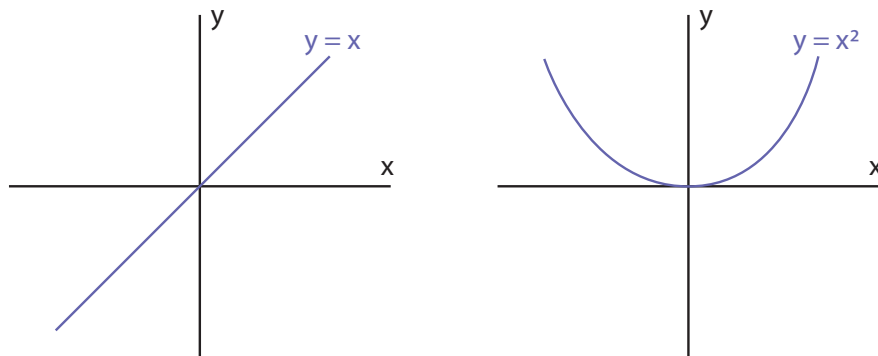


Figure 8: Graphes de $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$

1.2.3.2 Plongements

L'exemple précédent se généralise simplement au cas où l'image de la fonction candidate à être transverse est elle-même une sous-variété. En effet, pour une telle fonction, la transversalité à une sous-variété W équivaut simplement à la transversalité de son image et de W . Essentiellement, c'est l'idée de la transversalité d'une fonction et d'une sous-variété : l'image de la fonction transverse la sous-variété nettement.

Formalisée, cette idée devient :

[1.O] DÉFINITION (*Plongement*)

Soit V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de V sur $f(V)$ (au sens de 1.1.4). On dit que f est un plongement si $f(V)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^p .

On a alors la :

[1.P] PROPOSITION (*Transversalité pour un plongement*)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , W une sous-variété de \mathbb{R}^p , et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ un plongement. Alors :

$$f \text{ est transverse à } W \iff f(V) \text{ est transverse à } W$$

PREUVE DE [1.P].

Tout d'abord, remarquons que par définition $f(V)$ est une sous-variété, et que $\dim f(V) = \dim V$ ($\mathcal{T}_x f$, pour $x \in V$, fournit un isomorphisme de $\mathcal{T}_x V$ sur $\mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$).

Supposons montré que $\forall x \in f^{-1}(W)$, $\text{Im } \mathcal{T}_x f = \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$. Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est transverse à } W &\iff \forall x \in f^{-1}(W), \quad \text{Im } \mathcal{T}_x f \bar{\cap} \mathcal{T}_{f(x)} W \\ &\iff \forall x \in f^{-1}(W), \quad \mathcal{T}_{f(x)}(f(V)) \bar{\cap} \mathcal{T}_{f(x)} W \\ &\iff f(V) \text{ est transverse à } W \end{aligned}$$

Montrons à présent l'égalité acceptée.

Soient $x \in f^{-1}(W)$ et γ un arc sur V , tel que $\gamma(0) = x$. Alors, $f \circ \gamma$ est un arc tracé sur $f(V)$ tel que $f \circ \gamma(0) = f(x)$. Ainsi, son vecteur vitesse en 0 est dans l'espace tangent à $f(V)$ en $f(x)$ par définition même. D'où $\mathcal{T}_x f(\gamma'(0)) \in \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$. $\gamma'(0)$ décrit $\mathcal{T}_x V$, donc $\text{Im } \mathcal{T}_x f \subset \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$.

De plus, $\mathcal{T}_x f$ est un isomorphisme. En effet, la règle de la chaîne donne simplement que $\mathcal{T}_x f$ admet pour inverse $\mathcal{T}_{f(x)} f^{-1}$. Donc $\dim(\text{Im } \mathcal{T}_x f) = \dim \mathcal{T}_x V$. Or, $\dim \mathcal{T}_x V = \dim V = \dim f(V) = \dim \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$. Donc finalement, $\dim \text{Im } \mathcal{T}_x f = \dim \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$.

On a donc enfin prouvé que $\forall x \in f^{-1}(W)$, $\text{Im } \mathcal{T}_x f = \mathcal{T}_{f(x)}(f(V))$.

□

1.2.3.3 Submersions

Par définition, pour une submersion $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$, en tout point x de V , $\mathcal{T}_x f$ est surjective, donc $\text{Im}(\mathcal{T}_x f) = \mathbb{R}^p$. Donc f est transverse à toute sous-variété W de \mathbb{R}^p .

1.3 Généricité

Notre idée de généricité a besoin d'un appui théorique solide. Rappelons que notre but est de quantifier le fait que l'étude d'un problème précis peut-être ramenée à cette même étude, simplifiée, sur un sous-ensemble "assez gros", qui représente les situations les plus probables.

La première idée qu'on peut avoir serait de demander qu'un ensemble soit considéré "assez gros" lorsque c'est un ouvert dense de l'espace ambiant. On adopte donc un point de vue très topologique. Si on tire au *hasard* un objet, on peut le déformer de manière arbitrairement petite pour qu'il atterisse dans notre ensemble spécifique. Cependant, cette condition de densité et d'ouverture est beaucoup trop forte et instable. On parlera donc plutôt d'intersection dénombrable d'ouverts denses. C'est pourquoi on pose la :

[1.Q] DÉFINITION (Partie résiduelle)

Soit A une partie d'un espace topologique. On dit que A est résiduelle si elle contient l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts denses.

L'intérêt de cette définition est la stabilité par intersection dénombrable et le théorème de Baire. Par définition, on appelle *espaces de Baire* les espaces où toute partie résiduelle est dense. On a alors le :

[1.R] THÉORÈME (de Baire)

Tout espace métrique complet est de Baire. En particulier, tout espace vectoriel de dimension finie est de Baire.

On dira qu'une propriété est générique (traduisant l'intuition du "vrai presque partout") si elle est vraie sur une partie résiduelle.

2 Le théorème de transversalité

Il est venu le temps d'utiliser enfin les notions introduites dans la première section pour atteindre les objectifs fixés dans l'introduction.

Dans cette section, nous allons montrer que la transversalité est un comportement générique pour les applications (dans un sens qui sera bien entendu expliqué précisément). Cette transversalité traduisant des situations qui se gèrent plus facilement que dans le cas général, on arrive ainsi bien à réduire l'étude de problèmes compliqués sur un "sous-ensemble représentatif de la population", où le travail est plus aisé.

Avant d'aborder le théorème de transversalité, il nous faut introduire le théorème de Sard qui permet de l'établir. Nous nous contenterons d'en donner l'heuristique, sans le démontrer. En effet, c'est un théorème coûteux dont la démonstration n'apporterait rien de substantiel à cet exposé.

Dans la suite, les fonctions sont prises C^∞ afin d'éviter des complications techniques qui ne sont pas centrales dans notre étude.

2.1 Le théorème de Sard

2.1.1 Mise en place et énoncé

Le théorème de Sard est un résultat très important de régularité des fonctions C^∞ . La version que nous en donnons ici n'est pas la version "habituelle", mais elle s'en déduit au prix de quelques efforts. Elle nous apprend que l'image d'une sous-variété par une telle fonction ne contient qu'une infime partie de valeurs critiques (au sens de [1.F]), où l'ouvert est remplacé par une sous-variété, et la différentielle par l'application tangente) :

[2.A] THÉORÈME (de Sard)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application C^∞ .

L'ensemble des valeurs régulières de f est une partie résiduelle de \mathbb{R}^p .

2.1.2 Heuristique et idée de la démonstration

Le théorème de Sard apporte une information très importante de régularité sur les fonctions C^∞ : génériquement, aucun point de l'ensemble image n'est une valeur critique (ou en voyant le verre à moitié plein, tout point est une valeur régulière). Il faut bien remarquer que cela n'apporte aucune information sur le *lieu critique* de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des points critiques. L'exemple canonique est la fonction constante : l'ensemble des valeurs critiques est simplement un singleton, alors que le lieu critique est l'espace tout entier.

La démonstration de ce théorème est très complexe. Elle s'articule principalement en trois étapes : on le montre dans le cas où $\dim V = p = 1$, puis $\dim V < p$, puis on conclut par une récurrence sur $\dim V$. L'idée directrice de la démonstration, qui est aussi la signification profonde du théorème, est que la différentielle étant non surjective en les points critiques, les valeurs de la fonction *ne remplissent pas* tout l'espace si on se place sur un voisinage approprié.

Ainsi, en restreignant de plus en plus le voisinage sur lequel on se place, on enferme les valeurs critiques dans des ensembles “de plus en plus petits”. La figure 9 affirme bien cette vision.

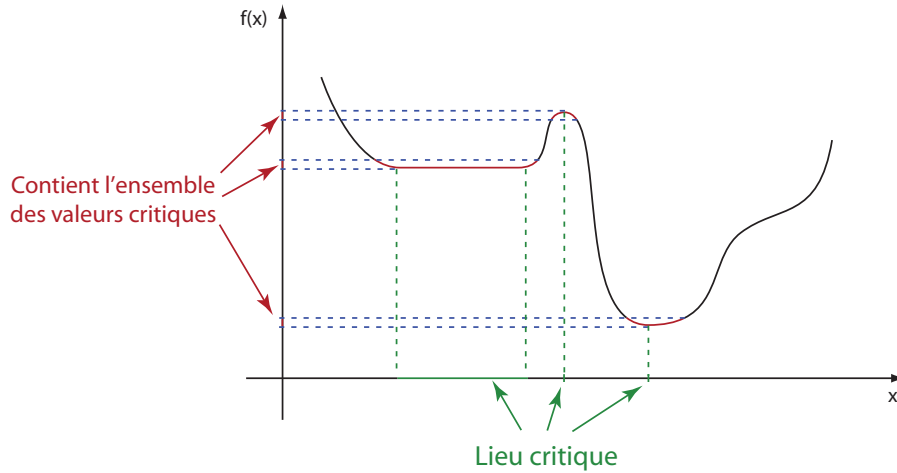


Figure 9: Heuristique du théorème de Sard dans le cas $V = \mathbb{R}$ et $p = 1$

2.2 Le théorème de transversalité

Dans cette sous-partie 2.2, on se donne V une sous-variété de \mathbb{R}^n et W une sous-variété de \mathbb{R}^p , pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2.2.1 Préliminaire

Avant de passer au théorème de transversalité à proprement parler, considérons tout d’abord la proposition suivante, qui traduit le fait intuitif que l’hypothèse de transversalité d’une fonction assure qu’on se prémunit de dégénérescences pathologiques :

[2.B] PROPOSITION

Soient $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction \mathcal{C}^1 et $a \in f^{-1}(W)$.

Si f est transverse à W en a , alors $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n en a .

De plus, l’espace tangent à $f^{-1}(W)$ en a est l’image réciproque de $\mathcal{T}_{f(a)}W$ par $\mathcal{T}_a f$:

$$\mathcal{T}_a(f^{-1}(W)) = (\mathcal{T}_a f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a)}W)$$

PREUVE DE [2.B].

Pour montrer que $f^{-1}(W)$ est une sous-variété, il nous faut raisonner localement en chacun de ses points. Fixons donc $a \in f^{-1}(W)$ et $b = f(a) \in W$, et munissons-nous d'équations locales appropriées aux sous-variétés en présence : soit $v = (v_1, \dots, v_m)$ une submersion d'équations locales en a de V sur $Z \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$, et $w = (w_1, \dots, w_{m'})$ une de W en b sur $\Omega \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^p}(b)$.

Par définition, on a :

$$f^{-1}(W) = \{x \in V \mid f(x) \in W\}$$

Nous allons chercher à caractériser cet ensemble à partir des équations locales exhibées. Pour cela, nous considérons un ouvert $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$ contenu dans Z et tel que $V \cap U \subset f^{-1}(\Omega)$. C'est possible car $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de V .

Alors, si on prend x dans U , on a tout fait pour que : $[x \in V \Leftrightarrow v(x) = 0]$ car $x \in Z$ et $[f(x) \in W \Leftrightarrow w \circ f(x) = 0]$ car $f(x) \in \Omega$. Ainsi, on peut écrire :

$$f^{-1}(W) \cap U = \left\{ x \in U \mid \begin{array}{l} w \circ f(x) = 0 \\ v(x) = 0 \end{array} \right\}$$

Alors, si on montre que ces équations sont indépendantes, la définition 2 de [1.A] nous indique que $f^{-1}(W)$ est une sous-variété en a , avec a quelconque de $f^{-1}(W)$, d'où on déduit que $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

Pour cela, il est utile de remarquer que quels que soient les deux sous-espaces vectoriels de E_1 de \mathbb{R}^n et E_2 de \mathbb{R}^p et l'application linéaire $u : E_1 \rightarrow E_2$, on a la relation :

$$\text{codim}_{\mathbb{R}^p}(u(E_1) + E_2) + \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(E_1 \cap u^{-1}(E_2)) = \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(E_1) + \text{codim}_{\mathbb{R}^p}(E_2)$$

Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'application linéaire : $(x, x') \in E_1 \times E_2 \mapsto u(x) + x' \in \mathbb{R}^p$. Ainsi, on obtient l'équivalence :

$$u(E_1) \bar{\cap} E_2 \iff \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(E_1 \cap u^{-1}(E_2)) = \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(E_1) + \text{codim}_{\mathbb{R}^p}(E_2)$$

Revenons à notre cas en prenant $E_1 = \mathcal{T}_a V$, $E_2 = \mathcal{T}_{f(a)} W$ et $u = \mathcal{T}_a f$, on obtient la relation suivante, découlant de l'hypothèse de transversalité de $\text{Im } \mathcal{T}_a f = \mathcal{T}_a f(\mathcal{T}_a V)$ et $\mathcal{T}_{f(a)} W$:

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{T}_a V \cap (\mathcal{T}_a f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a)} W)) &= \text{codim}_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{T}_a V) + \text{codim}_{\mathbb{R}^p}(\mathcal{T}_{f(a)} W) \\ &= m + m' \end{aligned} \quad (2.i)$$

Or, si $x \in \mathcal{T}_a V$:

$$\begin{aligned} x \in (\mathcal{T}_a f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a)} W) &\iff \mathcal{T}_a f(x) \in \text{Ker } dw_{(f(a))} \\ &\iff dw_{(f(a))}(\mathcal{T}_a f(x)) = 0 \\ &\iff d(w \circ f)_{(a)}(x) = 0 \\ &\iff x \in \text{Ker}(d(w \circ f)_{(a)}) \end{aligned}$$

Et par définition : $\mathcal{T}_a V = \text{Ker } dv_{(a)}$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a V \cap (\mathcal{T}_a f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a)} W) &= \text{Ker}(d(w \circ f)_{(a)}) \cap \text{Ker } dv_{(a)} \\ &= \bigcap_{i=1}^{m'} \text{Ker}(d(w_i \circ f)_{(a)}) \cap \bigcap_{i=1}^m \text{Ker } dv_{i(a)} \end{aligned}$$

Enfin, grâce à 2.i :

$$\text{codim}_{\mathbb{R}^n} \left(\bigcap_{i=1}^{m'} \text{Ker}(d(w_i \circ f)_{(a)}) \cap \bigcap_{i=1}^m \text{Ker} dv_{i(a)} \right) = m + m'$$

ce qui prouve, par dualité, la liberté de la famille

$$(d(w_1 \circ f)_{(a)}, \dots, d(w_{m'} \circ f)_{(a)}, dv_{1(a)}, \dots, dv_{m(a)})$$

Ceci montre que les équations sont bien fonctionnellement indépendantes, et donc que $f^{-1}(W)$ est une sous-variété d'après ci-dessus.

Enfin, l'égalité :

$$\mathcal{T}_a(f^{-1}(W)) = (\mathcal{T}_a f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a)} W)$$

découle simplement des définitions, des équations locales déjà manipulées, et de la règle de la chaîne. □

2.2.2 Énoncé et heuristique du théorème

Ce théorème s'applique à une famille de fonctions $f_\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ indexées par $\lambda \in \Lambda$, où Λ est un ouvert d'un espace vectoriel L de dimension finie (qui joue simplement le rôle d'espace de paramètres). Pour l'exprimer, on pose la fonction :

$$f : \begin{cases} V \times \Lambda & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, \lambda) & \mapsto f_\lambda(x) \end{cases}$$

On suppose que f est \mathcal{C}^∞ , ce qui donne une forte condition de régularité des f_λ à la fois par rapport à $\lambda \in \Lambda$ et par rapport à $x \in V$. Ainsi armé, on peut énoncer le :

[2.C] THÉORÈME (de Transversalité, forme faible)

Soit W une sous-variété de \mathbb{R}^p . Supposons que f soit transverse à W . Alors, $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda / f_\lambda \text{ est transverse à } W\}$ est une partie résiduelle de Λ .

Ce théorème fournit un résultat extrêmement important. Comme nous allons le voir, il permet par exemple de montrer que quelque soit la sous-variété W de \mathbb{R}^p , le comportement générique d'une application de V dans \mathbb{R}^p est de lui être transverse. Comme on l'a déjà expliqué ce "générique" sous-entend le point de vue suivant : on peut déformer toute application de façon arbitrairement petite (au sens d'une topologie convenable) en une application transverse.

L'idée sous-jacente est que pour montrer qu'une propriété P est vraie génériquement sur l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ de V dans \mathbb{R}^p , on l'exprime comme une condition de transversalité, puis on choisit une application f quelconque. En créant une famille de fonctions "autour" de f assez importante (ie. telle que la fonction de l'énoncé soit transverse à W), le théorème montre qu'il existe une application de la famille aussi près que désiré de f qui vérifie P . On peut en déduire la généricité de P (voir plus bas).

2.2.3 Preuve du théorème

On suppose que f est transverse à W . On se place bien sûr dans le cas où $f^{-1}(W) \neq \emptyset$, sinon le résultat est trivial.

Ainsi, $f^{-1}(W)$ est une sous-variété de $V \times L$ d'après [2.B]. Notre but est de montrer que pour λ , le fait de donner lieu à la transversalité de f_λ est une propriété générique. Pour cela, on va bien sûr utiliser le théorème de Sard en exprimant les éléments de Λ_1 comme valeurs régulières d'une certaine application. Cette application est la seconde projection (clairement C^∞) :

$$p_2 : \begin{array}{l|l} f^{-1}(W) & \rightarrow \Lambda \\ (x, \lambda) & \mapsto \lambda \end{array}$$

Et on a en effet le :

[2.D] LEMME

Λ_1 est exactement l'ensemble des valeurs régulières de p_2 .

Acceptons provisoirement ce lemme. Alors, par application du théorème de Sard [2.A], Λ_1 est une partie résiduelle de Λ . Le théorème est montré. Tout se joue donc dans la preuve de ce lemme.

PREUVE DE [2.D].

Nous allons montrer ici que pour tout couple (a, λ) de $V \times \Lambda$, on a :

$$f_\lambda \text{ est transverse à } W \text{ en } a \iff (a, \lambda) \text{ est un point régulier de } p_2 \quad (2.ii)$$

De ceci, on tire immédiatement l'équivalence montrant le lemme :

$$f_\lambda \text{ est transverse à } W \iff \lambda \text{ est une valeur régulière de } p_2$$

Pour montrer (2.ii), posons quelques notations. On fixe une fois pour toutes (a, λ) dans $V \times \Lambda$. Alors :

$$\mathcal{T}_{(a,\lambda)}f : \begin{array}{l|l} \mathcal{T}_a V \times L & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (\alpha, \kappa) & \mapsto t_1(\alpha) + t_2(\kappa) \end{array}$$

où $t_1 = \mathcal{T}_a f_\lambda$ (λ fixe), et $t_2 \in \mathcal{L}(L, \mathbb{R}^p)$ est la différentielle en a de $\lambda \mapsto f_\lambda(a)$ (bien définie car f est supposée C^∞ , x fixe).

Nous allons maintenant montrer deux résultats qui, combinés, vont permettre de conclure.

Tout d'abord, caractérisons plus précisément les points réguliers de p_2 . (a, λ) en est un si et seulement si, par définition, $\mathcal{T}_{(a,\lambda)}p_2$ est surjective. Pour y voir plus clair, explicitons :

$$\mathcal{T}_{(a,\lambda)}p_2 : \begin{array}{l|l} \mathcal{T}_{(a,\lambda)}(f^{-1}(W)) & \rightarrow L \\ (\alpha, \kappa) & \mapsto \kappa \end{array}$$

D'après [2.B], on sait qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{(a,\lambda)}f^{-1}(W) &= (\mathcal{T}_{(a,\lambda)}f)^{-1}(\mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W) \\ &= \{ (\alpha, \kappa) \in \mathcal{T}_a V \times L \mid t_1(\alpha) + t_2(\kappa) \in \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W \} \end{aligned}$$

On peut alors traduire la condition de surjectivité sous la forme équivalente suivante :

$$\forall \kappa \in L, \quad \exists \alpha \in \mathcal{T}_a V \text{ tel que } \underbrace{t_1(\alpha) + t_2(\kappa)}_{=\mathcal{T}_{(a,\lambda)}f(\alpha,\kappa)} \in \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W$$

qui équivaut encore à :

$$\forall \kappa \in L, \quad \exists (\alpha', y) \in \text{Im } t_1 \times \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W \text{ tels que } t_2(\kappa) = \alpha' + y$$

et finalement à :

$$\text{Im } t_2 \subset \text{Im } t_1 + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W$$

Pour résumer, on vient de montrer que :

$$(a, \lambda) \text{ est un point régulier de } p_2 \iff \text{Im } t_2 \subset \text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W \quad (2.iii)$$

D'autre part, l'hypothèse de transversalité faite sur f peut s'écrire sous la forme suivante (*cf.* **Remarque 6**) :

$$\text{Im } \mathcal{T}_{(a,\lambda)}f + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W = \mathbb{R}^p$$

Or, $\text{Im } \mathcal{T}_{(a,\lambda)}f = \text{Im } t_1 + \text{Im } t_2$, avec $t_1 = \mathcal{T}_a f_\lambda$. Donc :

$$\text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \text{Im } t_2 + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W = \mathbb{R}^p \quad (2.iv)$$

Ces remarques faites, on peut s'attaquer à l'équivalence (2.ii) :

- Si f_λ est transverse à W en a , alors

$$\text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \underbrace{\mathcal{T}_{f_\lambda(a)}W}_{=\mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W} = \mathbb{R}^p$$

Donc $\text{Im } t_2 \subset \mathbb{R}^p = \text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W$. Et (2.iii) permet de conclure que (a, λ) est un point régulier de p_2 .

- Si (a, λ) est un point régulier de p_2 , alors, par (2.iii), on a :

$$\text{Im } t_2 \subset \text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \mathcal{T}_{f(a,\lambda)}W$$

Donc (2.iv) s'écrit : $\mathbb{R}^p = \text{Im } \mathcal{T}_a f_\lambda + \mathcal{T}_{f_\lambda(a)}W$, ce qui montre que f_λ est transverse à W en a .

□

2.3 Des applications directes

Nous nous attachons ici à utiliser le théorème sans plus attendre sur deux exemples, afin d'illustrer sa puissance et son élégance.

2.3.1 Généricité de la transversalité

Si on se fixe deux sous-variétés V de \mathbb{R}^n et W de \mathbb{R}^p , quel comportement doit-on attendre d'une application *générique* $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ vis-à-vis de W ? Peut-on espérer que f soit transverse à W ? Comme nous allons le voir, la réponse est *oui*. La situation générique pour une fonction est d'être transverse à W .

En effet, prenons une application C^∞ quelconque $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Le but est de créer une famille de fonctions proches de f à laquelle on va pouvoir appliquer le théorème de transversalité. À cette fin, fixons B une boule ouverte de \mathbb{R}^p , et posons :

$$F : \begin{cases} V \times B & \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, \lambda) & \mapsto F(x, \lambda) = f_\lambda(x) = f(x) + \lambda \end{cases}$$

À x fixé, $\lambda \mapsto \mathcal{T}_{(x, \lambda)} F$ est surjective car F est alors une translation de B . *A fortiori*, la matrice jacobienne de F est de rang p (le rang de ses colonnes est supérieur ou égal à p qui est le rang maximal). Donc F est une submersion. Ainsi, par 1.2.3.3, on peut affirmer que F est transverse à toute sous-variété de \mathbb{R}^p , en particulier à W .

Reste alors à appliquer avec satisfaction le théorème de transversalité. Génériquement (sur λ), f_λ est transverse à W . Ainsi, f peut être perturbée de façon arbitrairement petite pour être transverse à W . Cela se conçoit bien après avoir observé la figure 10.

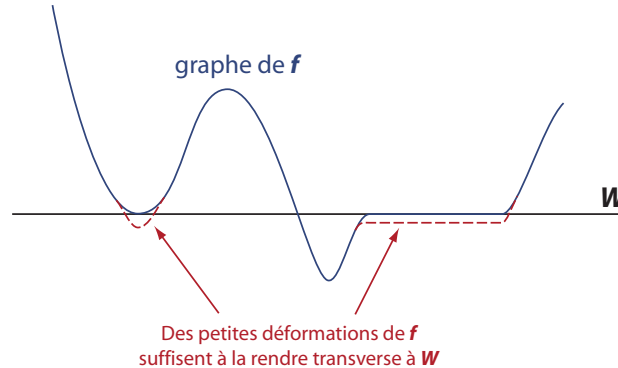


Figure 10: Les applications transverses à une sous-variété donnée sont génériques

À ce stade, on peut montrer la densité des fonctions transverses dans l'espace des fonctions C^∞ de V dans \mathbb{R}^p , à condition de munir cet espace d'une topologie "raisonnable" qui considère les petites constantes comme de petits objets (ce qui n'est pas scandaleux), qu'on ne cherchera pas à expliciter. Afin de conclure au caractère générique de la situation, il suffit de montrer que l'ensemble des fonctions de V dans \mathbb{R}^p qui sont transverses à W est une intersection dénombrable d'ouverts. La densité déjà prouvée permet de conclure à la densité de chaque ouvert, ce qui fait de l'ensemble considéré un résiduel, montrant le résultat tant espéré.

Nous accepterons un tel résultat, sa démonstration étant très largement au-delà du cadre de cette étude.

2.3.2 Le théorème de Sard revisité

Il est intéressant de remarquer que le théorème de Sard est en réalité un cas particulier du théorème de transversalité. Cependant, il faut rester calme, cela ne révolutionne pas sa démonstration puisqu'on l'utilise pour démontrer ce dernier. On reprend ici les notations qu'on vient juste de manipuler.

La remarque essentielle est qu'une application est transverse à un singleton $W = \{y\}$ si et seulement si y est une valeur régulière de f . En effet, si on reprend la définition, $f \bar{\cap} W$ équivaut à $\forall x \in f^{-1}(W), \text{Im } \mathcal{T}_x f \bar{\cap} \mathcal{T}_{f(x)} W$, ou encore $\mathbb{R}^p = \text{Im } \mathcal{T}_x f + \mathcal{T}_y W$. Or, ici $\mathcal{T}_y W = \{0\}$ (dimension 0), donc la transversalité équivaut à $\mathbb{R}^p = \text{Im } \mathcal{T}_x f$, ou encore $\mathcal{T}_x f$ est surjective, *ie.* y est une valeur régulière de f .

Ce résultat en poche, on fait le même raisonnement que ci-dessus avec $W = \{0\}$. Ainsi, génériquement, $f + \lambda$ admet 0 pour valeur régulière, ce qui équivaut à $-\lambda$ valeur régulière de f . Donc génériquement, $\lambda \in \mathbb{R}^p$ est une valeur régulière de f , ce qui est exactement le théorème de Sard [2.A].

3 Application aux fonctions de Morse

Le théorème de transversalité rend la vie du mathématicien plus agréable. On le voit en particulier avec son application aux fonctions de Morse dans cette section. Il donne un résultat important sur les fonctions \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} en nous apprenant que les pathologies auxquelles on peut s'attendre sont en réalité peu probables, puisque génériquement, une telle fonction ne les présente pas.

Nous allons commencer par introduire les quelques notions qu'on manipu-lera, pour ensuite énoncer et expliquer le théorème. Nous concluons par sa démonstration.

3.1 Points et fonctions de Morse

3.1.1 Différentielle seconde

Ici, nous n'aurons affaire qu'à des fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Prenons une telle fonction $f \in \mathcal{C}^2$. On sait que localement, autour d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, le développement de Taylor de f en x est :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f(x+h) = f(x) + df_{(x)}(h) + \frac{1}{2}Hf_{(x)}(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2)$$

où $Hf_{(x)}$ est la forme quadratique de \mathbb{R}^n canoniquement associée à la matrice hessienne de f en x : $Hm_{f(x)} = [\partial_i \partial_j f(x)]_{1 \leq i, j \leq n}$.

Qu'en est-il si f part maintenant d'une sous-variété V de \mathbb{R}^n ? Nous accepterons ici qu'il en est de même, à condition de passer à la structure tangente, dans la philosophie de ce que l'on a déjà présenté plus haut en 1.1.4.

En effet, si on prend $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^2 , par définition, on dispose d'un prolongement \mathcal{C}^2 de f à un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant V , que l'on notera f_0 . Alors, par la définition usuelle qui précède, on peut définir $Hf_{0(a)}$ pour $a \in V$ sans problème. On définit alors $Hf_{(a)}$ comme la restriction à $\mathcal{T}_a V$ de la forme quadratique $Hf_{0(a)}$.

Remarque 8.

On peut vérifier que si on choisit un paramétrage local de V en a (4 en [1.A]) $\varphi : \Omega \rightarrow V$ où $\Omega \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^{\dim V}}(0)$, les coefficients de la forme hessienne de f dans la base de $\mathcal{T}_a V$ formée des $\partial_i \varphi(0)$ sont les dérivées partielles secondes en 0 de la fonction $f \circ \varphi$.

On notera $Hb_{f(a)}$ la forme bilinéaire de $\mathcal{T}_a V \times \mathcal{T}_a V$ dans \mathbb{R} associée à $Hf_{(a)}$.

3.1.2 Points de Morse

Comme ci-dessus, munissons-nous de $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^2 , où V est une sous-variété de \mathbb{R}^n . Si $a \in V$, on pose :

$$\boxed{\text{Ker } Hf_{(a)} = \{x \in \mathcal{T}_a V \mid \forall y \in \mathcal{T}_a V, Hb_{f(a)}(x, y) = 0\}}$$

On dit que $Hf_{(a)}$ est *dégénérée* si $\text{Ker } Hf_{(a)} \neq \emptyset$. Elle est *non-dégénérée* dans le cas contraire.

On définit alors un point de Morse comme suit :

[3.A] DÉFINITION (*Point de Morse*)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^2 .
 $a \in V$ est un point de Morse pour f si c'est un point critique de f
 (ie. $df_{(a)} = 0$) et si $Hf_{(a)}$ est non-dégénérée.

Le point de Morse est en quelque sorte le “plus gentil” des points critiques, puisque l'annulation des dérivées “s'arrête” à l'ordre 1. La répartition de tels points est elle-même assez calme, puisqu'on peut énoncer la :

[3.B] PROPOSITION (*Isolement des points de Morse*)

Les points de Morse sont des points critiques isolés.

PREUVE DE [3.B].

Afin d'alléger les notations, on va supposer dans cette preuve que V est un ouvert de \mathbb{R}^n . On s'y ramène depuis le cas général en considérant un paramétrage local adéquat.

Cette proposition découle alors simplement du théorème d'inversion locale. En effet, soit a un point de Morse d'une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Dire que $Hf_{(a)}$ est non-dégénérée, c'est dire que $\text{Hm}f_{(a)}$ est inversible.

D'autre part, il est immédiat de voir, en passant par des bases duales, que $\text{Hm}f_{(a)}$ est la matrice de la différentielle de $df : x \mapsto df_{(x)}$ en a car :

$$d(df)_{(a)}(e_i) = \sum_{j=1}^n \partial_i \partial_j f(a) e_j^*$$

Par le théorème d'inversion locale, on sait alors que df est un difféomorphisme local d'un ouvert $U \in \mathbb{V}_{\mathbb{R}^n}(a)$ (car $\mathcal{T}_a V = \mathbb{R}^n$, V étant un ouvert de \mathbb{R}^n) dans $df(U)$, en particulier injective, et donc elle ne s'annule localement qu'en a . Donc dans U , a est le seul point critique.

Donc a est un point critique isolé.

□

3.1.3 Fonction de Morse

[3.C] DÉFINITION (*Fonction de Morse*)

Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^2 .
 On dit que f est une fonction de Morse si chacun de ses points critiques est de Morse.

De manière équivalente, on peut dire que f est une fonction de Morse si 0 est une valeur régulière de $df : x \mapsto df_{(x)}$.

On peut alors énoncer la :

[3.D] PROPOSITION (Topologie des points de Morse)

L'ensemble des points de Morse d'une fonction de Morse est un fermé discret de V .

PREUVE DE [3.D].

On prend dans cette preuve les mêmes notations, avec f une fonction de Morse.

Par définition, le lieu critique de f coïncide ici avec l'ensemble de ses points de Morse. Or, ce lieu critique est fermé dans V car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ (qui désigne l'application linéaire nulle) par la fonction df qui est continue car f est \mathcal{C}^2 , a fortiori \mathcal{C}^1 .

Donc l'ensemble des points de Morse de f est fermé dans V , le caractère discret venant de [3.B].

□

3.2 Énoncé et preuve du théorème**3.2.1 Énoncé**

Un bel exemple de l'utilité du théorème de transversalité est qu'il nous permet de savoir que pour une application générique d'une sous-variété à valeurs réelles, tout point critique est de Morse. Ainsi, dans l'étude générique des applications de sous-variétés, on est toujours dans la situation confortable où la hessienne est non-dégénérée.

On énonce ce théorème sous la forme suivante :

[3.E] THÉORÈME (Généricité des fonctions de Morse)

*Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^∞ .
Génériquement, f est une fonction de Morse.*

3.2.2 Preuve du théorème

On se munit de V une sous-variété de \mathbb{R}^n et de $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^∞ . Nous allons montrer le :

[3.F] LEMME

Soit $F = \mathbb{R}^{\dim V}$ (et F^ son dual, ie. $F^* = \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$). Pour toute immersion $i : V \rightarrow F$, l'ensemble :*

$$A = \{u \in F^* \mid f + u \circ i \text{ est une fonction de Morse}\}$$

est résiduel.

On acceptera ensuite, comme ci-dessus, l'existence d'une topologie adéquate sur l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^∞ de V dans \mathbb{R} et l'extension de la densité à la généricité, ce qui permet à ce lemme de fournir la preuve du théorème.

Nous traiterons ici le cas plus simple où V est ouverte dans \mathbb{R}^n . Le cas général s'en déduit en prenant un paramétrage local adéquat de $\mathbb{R}^{\dim V}$ dans V , et en recouvrant la sous-variété par une famille dénombrable de compacts. Cette manipulation étant assez technique, nous en éviterons les complications.

Afin de montrer ce lemme [3.F], considérons l'application suivante :

$$r : \begin{cases} V \times F^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) & \mapsto d(f + u \circ i)_{(x)} \end{cases}$$

Supposons acquis que r est une submersion. Alors, elle est transverse à la sous-variété triviale $\{0\}$. Par le théorème de transversalité, on peut en déduire que génériquement (en u), $x \mapsto d(f + u \circ i)_{(x)}$ est transverse à $\{0\}$. Comme on l'a déjà vu, cela veut exactement dire que cette application admet 0 pour valeur régulière.

Ainsi, par la définition [3.C], on obtient que génériquement (en u), $f + u \circ i$ est une fonction de Morse. Cela montre le lemme.

Revenons à présent sur le fait que r est une submersion. On peut ré-écrire r sous la forme suivante par linéarité :

$$r(x, u) = df_{(x)} + u \circ di_{(x)}$$

Le calcul de $dr_{(x,u)}(\alpha, \beta)$ mène à :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_x V \times F^*, \quad dr_{(x,u)}(\alpha, \beta) = \dots (\alpha) + \beta \circ di_{(x)}$$

où le premier terme est en α seulement.

Or il est évident que l'application $\beta \in F^* \mapsto \beta \circ di_{(x)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est surjective, puisque $di_{(x)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, F)$ est injective (i est une immersion), donc bijective par égalité des dimensions. *A fortiori*, $dr_{(x,u)}$ est surjective, ce qui clôt la démonstration.

3.3 Un corollaire frappant

En particulier, cela donne un résultat extrêmement spectaculaire dans le cas où V est compacte. On a vu en [3.D] que l'ensemble des points de Morse d'une fonction de Morse (qui est aussi son lieu critique) est un fermé discret de V . Donc si V est compacte, cet ensemble est lui-même un compact discret, c'est-à-dire un ensemble fini. Si on prend f générique, f est de Morse par [3.E], et donc on a montré le :

[3.G] COROLLAIRE (*Lieu critique fini*)

Soient V une sous-variété **compacte** de \mathbb{R}^n , $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application \mathcal{C}^∞ .

Génériquement, f a un nombre fini de points critiques et ce sont tous des points de Morse.

Références

- [1] **Marc Chaperon**, *Jets, transversalité, singularités : petite introduction aux grandes idées de René Thom*, Géométrie au XX^{ème} siècle, histoire et horizons, Hermann Paris (2005)
- [2] **Marc Chaperon**, *Qu'est-ce que la stabilité structurelle ?*, à paraître chez Hermann, collection Travaux en cours, acte des journées REHSEIS sur l'épistémologie des systèmes dynamiques (1999)
- [3] **Marc Chaperon**, *Calcul différentiel et calcul intégral*, Dunod (2003)
- [4] **Michel Demazure**, *Catastrophes et bifurcations*, Notes de cours à l'école polytechnique, Ellipses (1989)
- [5] **Alan Pollack & Victor W. Guillemin**, *Differential topology*, Prentice Hall (1974)
- [6] **François Rouvière**, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini (2003, première édition 1999)
- [7] **René Thom**, *Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique : un bilan*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S., tome 70 (1989)

Ce dossier a été réalisé en L^AT_EX, avec l'aide des logiciels *Adobe Illustrator* et *3D Studio Max 8* pour les illustrations.

Contacts

Je remercie vivement **Marc Chaperon** et **Nicolas Tosel** pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée.

Marc Chaperon est actuellement professeur en *géométrie et dynamique* à l'université Paris 7, et Nicolas Tosel est professeur en MP* au lycée Saint-Louis, Paris.