

La conjugaison des endomorphismes
de \mathbb{R}^n

Michaël Monerau

TIPE 2006

Sous la direction de **Nicolas Tosel**

Plan

1	Introduction	1
1.1	Position du problème	1
1.2	Notations	1
2	La classification linéaire	2
2.1	L'équivalence	2
2.2	La similitude	2
2.2.1	Définition	2
2.2.2	Réduction de Jordan	2
2.2.3	Description des classes de similitude	3
2.2.4	Intérêt des classes de similitude	4
2.3	L'équivalence différentielle	4
2.3.1	Motivation et définition	4
2.3.2	Etude des classes d'équivalence	4
3	La classification topologique	7
3.1	Définitions et intérêt	7
3.1.1	Définitions	7
3.1.2	Intérêt	9
3.2	Classes de conjugaison hyperboliques	10
3.2.1	La partie nilpotente	10
3.2.2	La partie automorphique	12
3.2.3	Conclusion	16
3.3	Classes de conjugaison non hyperboliques	16
4	Le théorème de Großman - Hartman	18
4.1	Préliminaire	18
4.2	Théorème de Großman - Hartman	19

Résumé

La deuxième moitié du XX^{ème} siècle a connu l'essor de la désormais bien connue *Théorie du chaos*. On entend par là l'étude de systèmes physiques très complexes liés à des équations que l'on ne peut résoudre directement, que l'on a du mal à appréhender. La théorie mathématique a très largement contribué à mieux comprendre bon nombre de ces phénomènes, et sous une forme tout à fait inédite.

En effet, c'est l'étude topologique des fonctions linéaires de \mathbb{R}^n qui a poussé aux résultats les plus probants, ces fonctions linéaires représentant l'évolution de systèmes physiques, plus précisément leurs états, sous la forme de portraits de phase à n dimensions. Tout l'enjeu de cette étude des endomorphismes de \mathbb{R}^n a été de trouver des moyens de classer les systèmes qui "se ressemblent" (*ie.* "qui ont à *peu près* le même comportement"), et c'est précisément dans ce domaine que la puissance des outils topologiques s'est révélée. Les résultats que l'on cherche sont plus qualitatifs que précisément quantitatifs.

Cette étude très riche des endomorphismes de \mathbb{R}^n aboutit à une classification quasi-totale de ceux-ci. Par classification, on entend séparation en classes d'objets *sémantiquement* et *structurellement* proches, dans un sens qu'il nous reste bien sûr à définir sans ambiguïté. Le problème a été résolu en grande partie par **J.H. Kuiper** et **J.W. Robin** en 1972, et c'est sur leur travail que nous nous appuyerons.

D'abord, nous nous attacherons à bien comprendre le problème et ses enjeux. Puis nous étudierons la classification linéaire des endomorphismes, plus communément appelée *similitude* en algèbre linéaire. On affinera encore la précision de notre étude en considérant la classification topologique, beaucoup plus précise et complexe, pour enfin illustrer son utilité par un détour du côté du théorème de Großman - Hartman.

1 Introduction

1.1 Position du problème

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme annoncé, notre étude se limitera ici aux endomorphismes de \mathbb{R}^n .

On cherche à classer ces objets de manière utile et cohérente. Par classer, on entend séparer les espaces en classes d'équivalence relatives à des relations d'équivalence qu'on aura pris le soin de définir et de justifier clairement. C'est le choix de ces relations qui sera plus ou moins pertinent pour atteindre notre but : arriver à une classification puissante des endomorphismes. Une classification *puissante* est en substance une classification qui nous donnera des résultats très forts si deux endomorphismes appartiennent à la même classe d'équivalence. Par exemple, on peut espérer comprendre l'action globale d'un endomorphisme sur \mathbb{R}^n donné en connaissant seulement celle d'un élément qui lui est équivalent. Par nature, on attend donc des résultats plus qualitatifs que quantitatifs.

1.2 Notations

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^n , *ie.* les applications linéaires de \mathbb{R}^n dans lui-même. L'ensemble des matrices correspondantes sera noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le groupe des inversibles de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (groupe linéaire) sera noté $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque le contexte est évident, on confondra l'endomorphisme et sa matrice, et les constantes seront identifiées à l'homothétie correspondante.

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sera normé par la norme triple usuelle ($\| \cdot \|$) subordonnée à la norme euclidienne classique ($\| \cdot \|$).

On notera \mathcal{C}^1 l'espace des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes de \mathbb{R}^n dans lui-même. La différentielle de $\varphi \in \mathcal{C}^1$ évaluée en $x \in \mathbb{R}^n$ sera désignée par $d\varphi_{(x)}$.

L'espace des homéomorphismes de \mathbb{R}^n dans lui-même sera noté \mathcal{H} .

2 La classification linéaire

Nous formulons ici les relations en termes d'endomorphismes car cela est plus maniable, mais il est bien évident que les énoncés sont similaires sur les matrices.

2.1 L'équivalence

La première relation d'équivalence qui vient à l'esprit est classique. C'est le changement de base d'un point de vue matriciel, ou plus simplement la conjugaison par deux isomorphismes :

[2.A] DÉFINITION. (*Equivalence*)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On définit la relation \sim ainsi :

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad \exists (p, q) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)^2 \quad \text{tels que} \quad v = p \circ u \circ q$$

C'est bien une relation d'équivalence comme on le vérifie immédiatement. Une étude simple montre que les classes d'équivalence de cette relation sont trop simples pour être utiles : il y en a $n + 1$, et elles sont constituées des endomorphismes de rang fixé. Il est bien évident qu'une telle classification est beaucoup trop grossière pour décrire précisément l'action globale d'un endomorphisme sur \mathbb{R}^n .

2.2 La similitude

2.2.1 Définition

La similitude est une relation beaucoup plus fine que la simple équivalence. On demande en plus, dans la définition ci-dessus : $q = p^{-1}$. Ainsi, deux endomorphismes sont semblables lorsque leur action est identique, simplement déplacée d'une base sur une autre. Matriciellement, cela revient à considérer que deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

On définit donc la relation d'équivalence suivante :

[2.B] DÉFINITION. (*Similitude*)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On définit la relation $\overset{l}{\sim}$ ainsi :

$$u \overset{l}{\sim} v \quad \Leftrightarrow \quad \exists p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \quad \text{tel que} \quad v = p \circ u \circ p^{-1}$$

Il devient alors intéressant de s'attacher à déterminer les classes d'équivalence définies par cette relation : les classes de similitude.

2.2.2 Réduction de Jordan

Le théorème de réduction dû à Jordan enlève tout mystère à l'étude des classes de similitude de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (et donc corollairement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Par convention, on notera $h_{k,\lambda}$ un “ k -bloc de Jordan” associé à la valeur propre λ :

$$h_{k,\lambda} = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}^{\text{taille } k}$$

Pour alléger la notation, on convient que $h_k = h_{k,0}$.

[2.C] THÉORÈME. (Réduction de Jordan réelle)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est semblable à la matrice \mathcal{J} , qui s’écrit par blocs :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} h_{k_1,\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & h_{k_s,\lambda_s} & & \\ & & & \mathbb{K}_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbb{K}_r \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$\mathbb{K}_l = \begin{pmatrix} \Lambda_l & \mathbb{I}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbb{I}_2 \\ & & & \Lambda_l \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \Lambda_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ -b_l & a_l \end{pmatrix}$$

Les réels λ_l sont les valeurs propres réelles (non-nécessairement distinctes) de A ; les nombres complexes $a_l \pm ib_l$ ($b_l \neq 0$) les valeurs propres complexes conjuguées (non-nécessairement distinctes).

Notons que la réduction de Jordan (parfois appelée *jordanisation*) généralise en quelque sorte la diagonalisation puisqu’elle rend l’action d’un endomorphisme excessivement simple et intelligible en trouvant une base dans laquelle la matrice est très “vide”. Elle coïncide d’ailleurs avec la forme diagonale dans le cas de matrices diagonalisables.

2.2.3 Description des classes de similitude

Le théorème précédent associe à chaque matrice, de manière univoque, sa *forme normale* : une matrice qui lui est semblable formée simplement de blocs de Jordan. Ainsi, deux endomorphismes sont semblables si et seulement si leur matrice ont même forme normale. La classification de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par classes de similitude est donc réduite à la détermination de cette forme normale de Jordan.

Par conséquent, si l’on note $N_f(\lambda, k)$ le nombre de k -blocs de Jordan (blocs de Jordan de taille k) associés à la valeur propre λ pour f , les $N_f(\lambda, k)$ sont des invariants de similitude, et ils caractérisent même chaque classe de similitude. Les connaître tous est clairement équivalent à connaître la forme normale de l’endomorphisme f , d’où la :

[2.D] PROPOSITION. (CNS de similitude)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$,

$$u \stackrel{l}{\sim} v \iff \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad N_u(\lambda, k) = N_v(\lambda, k)$$

2.2.4 Intérêt des classes de similitude

La classification linéaire mesure des ressemblances très quantitatives entre les endomorphismes. Par exemple, deux endomorphismes ayant des valeurs propres très proches, mais différentes, seront jugés comme définitivement différents. Pourtant, il est bien évident que leur action sur \mathbb{R}^n risque de ne pas être vraiment différente qualitativement. Le but qu'on s'est fixé au début de cette étude, à savoir déterminer des correspondances plus qualitatives que quantitatives, n'est pas compatible avec ce résultat. On préférerait que, tant que les endomorphismes ont des actions *voisines*, ils soient considérés comme équivalents. La classification linéaire ne permet pas de telle distinction.

Remarquons au passage que cette rigidité se traduit dans le fait qu'il y a une infinité de classes de similitude (car une infinité de valeurs propres possibles).

Cependant, cela ne veut pas dire pour autant que cette classification est inutile. Elle permet de résoudre beaucoup de problèmes, mais principalement en algèbre linéaire.

2.3 L'équivalence différentielle**2.3.1 Motivation et définition**

Afin d'affiner toujours les classes d'équivalence, on pourrait supprimer une grosse contrainte sur l'élément qui conjugue deux endomorphismes équivalents : la linéarité. Demandons-nous simplement ce que deviennent les classes si, au lieu d'imposer que p soit un endomorphisme dans la définition, on demande seulement que p soit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On obtient alors la définition analogue :

[2.E] DÉFINITION. (Equivalence différentielle)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On définit la relation $\stackrel{d}{\sim}$ ainsi :

$$u \stackrel{d}{\sim} v \iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1 \text{ tel que } v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

2.3.2 Etude des classes d'équivalence

Un important théorème permet de résoudre simplement le problème de la détermination des classes d'équivalence pour cette relation :

[2.F] THÉORÈME. (Classes d'équivalence différentielle)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$, alors :

$$u \stackrel{l}{\sim} v \iff u \stackrel{d}{\sim} v$$

[2.G] COROLLAIRE.

Les classes d'équivalence de $\stackrel{l}{\sim}$ sont les mêmes que celles de $\stackrel{d}{\sim}$.

Ainsi, il apparaît que l'équivalence différentielle n'est en rien plus fine que l'équivalence linéaire. Finalement, on s'aperçoit donc que le fait d'autoriser les conjugaisons par \mathcal{C}^1 -difféomorphismes ne permet pas d'affiner les classes d'équivalence. Mais revenons ici sur la démonstration de ce théorème.

PREUVE DE [2.F].

Afin de simplifier les calculs, considérons le lemme suivant :

[2.H] LEMME.

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$ avec $u \stackrel{d}{\sim} v$. Alors :

$$\exists \psi \in \mathcal{C}^1 \text{ tel que } \begin{cases} v = \psi \circ u \circ \psi^{-1} \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

Admettons provisoirement ce lemme. Considérons alors nos deux endomorphismes u et v conjugués par ψ comme dans le lemme. Par la règle de la chaîne, en différenciant $v = \psi \circ u \circ \psi^{-1}$, on obtient :

$$dv_{(x)} = d\psi_{(u(\psi(x)^{-1}))} \circ du_{(\psi(x)^{-1})} \circ d\psi_{(x)}^{-1} \quad (2.i)$$

Puis, en notant que $du_{(0)} = u$ et $dv_{(0)} = v$ par linéarité de u et v , $\psi(0) = 0$ donne en évaluant (2.i) en 0 :

$$v = d\psi_{(0)} \circ u \circ d\psi_{(0)}^{-1}$$

Et on constate donc que $u \stackrel{l}{\sim} v$ puisque $d\psi_{(0)} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Le sens indirect du théorème est ainsi prouvé.

Le sens direct est trivial : si u et v sont linéairement conjugués, u et v sont a fortiori conjugués par un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme puisqu'un isomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est également un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme (définition trivialement vérifiée).

PREUVE DE [2.H].

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$ avec $u \stackrel{d}{\sim} v$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1$, tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On pose $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. Nous allons montrer que ψ réalise ce qu'on veut.

$\psi(0) = 0$ est clairement vérifiée. Reste à voir que $v = \psi \circ u \circ \psi^{-1}$ l'est

également. Calculons en préliminaire ψ^{-1} :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) + \varphi(0) = \varphi(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi^{-1}(\psi(x) + \varphi(0)) = x \\ \Leftrightarrow & \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad \psi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(y + \varphi(0)) \end{aligned}$$

Maintenant, $\psi \circ u \circ \psi^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi \circ u \circ \psi^{-1}(x) &= \varphi \circ u \circ \psi^{-1} - \varphi(0) \\ &= \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}(x + \varphi(0)) - \varphi(0) \\ &= v(x + \varphi(0)) - \varphi(0) \\ &= v(x) + v \circ \varphi(0) - \varphi(0) \\ &= v(x) + \varphi \circ u(0) - \varphi(0) \\ &= v(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $v = \psi \circ u \circ \psi^{-1}$, avec $\psi \in \mathcal{C}^1$ et $\psi(0) = 0$. Le lemme est donc prouvé. □

Maintenant, les classes de similitude sont parfaitement comprises et décrites, et leur connaissance permet de répondre à bon nombre de problèmes classiques d'algèbre linéaire. Même après avoir tenté d'étendre les classes d'équivalence en autorisant des \mathcal{C}^1 -difféomorphismes comme conjuguants, on retrouve les mêmes classes, et donc la même classification. Il semble donc que nous ayons épuisé ce qui concerne la classification linéaire des endomorphismes de \mathbb{R}^n . Pour obtenir un résultat plus fin, il va falloir demander encore moins à l'élément conjuguant : être seulement un homéomorphisme. Comme le montre la partie 3, ce point de vue s'avère très fertile et permet de répondre à des problèmes qualitatifs toujours plus précis et complexes.

3 La classification topologique

3.1 Définitions et intérêt

3.1.1 Définitions

Comme on l'a vu, pour affiner les classes d'équivalence, il faut restreindre les contraintes imposées à l'élément conjuguant. On lui enlève donc l'hypothèse de différentiabilité pour arriver à la définition suivante :

[3.A] DÉFINITION. (Conjugaison topologique)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On définit la relation $\overset{t}{\sim}$ ainsi :

$$u \overset{t}{\sim} v \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathcal{H} \quad \text{tel que} \quad v = h \circ u \circ h^{-1}$$

Pour voir que les classes de conjugaison obtenues sont beaucoup plus fines, il suffit de considérer un exemple très simple. En dimension 1, soient les endomorphismes de \mathbb{R} : $f(x) = 2x$ et $g(x) = 8x$. On a $f \overset{l}{\sim} g$ (les valeurs propres sont conservées par similitude) mais $f \overset{t}{\not\sim} g$ (l'homéomorphisme conjuguant étant $\varphi(x) = x^3$). Cela présage d'une complexité largement supérieure dans la répartition des classes d'équivalence.

Quelques nouvelles notions et notations sont nécessaires pour la suite de cette section. Explicitons-les à présent.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note $\mathcal{W}^\sigma(f)$ (où $\sigma = \infty, +, 0, -, a$) la somme des sous-espaces caractéristiques de f associés à toutes les valeurs propres de f contenues dans l'ensemble \mathbf{E}^σ , où \mathbf{E}^σ est défini selon σ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^\infty &= \{0\} \\ \mathbf{E}^+ &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad 0 < |\lambda| < 1\} \\ \mathbf{E}^- &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > 1\} \\ \mathbf{E}^0 &= \{\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| = 1\} = \mathbb{U} \\ \mathbf{E}^a &= \mathbb{C}^* \end{aligned}$$

On remarque que $\mathcal{W}^a(f) = \mathcal{W}^+(f) \oplus \mathcal{W}^-(f) \oplus \mathcal{W}^0(f)$.

La décomposition de f en sous-espaces caractéristiques donne donc que les $\mathcal{W}^\sigma(f)$ sont stables par f et que :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &= \mathcal{W}^\infty(f) \oplus \mathcal{W}^+(f) \oplus \mathcal{W}^-(f) \oplus \mathcal{W}^0(f) \\ &= \mathcal{W}^a(f) \oplus \mathcal{W}^\infty(f) \end{aligned}$$

On notera simplement f_σ la restriction de f à $\mathcal{W}^\sigma(f)$.

f_a est la partie dite "automorphique" de f , *ie.* $\mathcal{W}^a(f)$ est le plus grand sous-espace stable par f sur lequel f agit comme un automorphisme.

f_+ (resp. f_-) est la partie asymptotique positive (resp. négative) de f , *ie.* $\mathcal{W}^+(f)$ (resp. $\mathcal{W}^-(f)$) est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f^m(x) = 0$ (resp. $\lim_{m \rightarrow +\infty} f^{-m}(x) = 0$), *cf.* [3.C] plus bas.

Enfin, f_∞ est la partie nilpotente de f , *ie.* $\mathcal{W}^\infty(f)$ est le plus grand sous-espace stable par f sur lequel f agisse comme un nilpotent.

Pour finir, on définit la notion très intuitive de sous-espace topologiquement stable :

[3.B] DÉFINITION. (Sous-espace topologiquement stable)

Soit \mathcal{W} une application qui à chaque endomorphisme f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ associe un sous-espace $\mathcal{W}(f)$ de \mathbb{R}^n stable par f .

On dit que \mathcal{W} est topologiquement stable si et seulement si lorsqu'on prend deux endomorphismes f et g topologiquement conjugués, avec $h \in \mathcal{H}$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$ et $h(0) = 0$, on a $\mathcal{W}(g) = h(\mathcal{W}(f))$.

C'est en particulier le cas si $\mathcal{W}(f)$ peut être défini à partir de f par des termes topologiques (son noyau, son image, ...).

La proposition suivante est alors immédiate :

[3.C] PROPOSITION.

$\mathcal{W}^\infty, \mathcal{W}^a, \mathcal{W}^+, \mathcal{W}^-$ sont des invariants topologiques.

[3.D] COROLLAIRE.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$f \stackrel{t}{\sim} g \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f_\infty \stackrel{t}{\sim} g_\infty \\ f_a \stackrel{t}{\sim} g_a \\ f_+ \stackrel{t}{\sim} g_+ \\ f_- \stackrel{t}{\sim} g_- \end{cases}$$

PREUVE DE [3.C].

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^\infty(f) &= \text{Ker } f^n \\ \mathcal{W}^a(f) &= \text{Im } f^n \end{aligned}$$

car, respectivement, l'indice de nilpotence de f est inférieur ou égal à la dimension de l'espace (n), et car $\mathcal{W}^a(f) \oplus \mathcal{W}^\infty(f)$ avec f inversible sur $\mathcal{W}^a(f)$ (puis étude simple dans la décomposition en espaces caractéristiques). Donc \mathcal{W}^∞ et \mathcal{W}^a sont des invariants topologiques puisqu'ils sont définis à partir de notions topologiques sur f .

Puis, la décomposition en sous-espaces caractéristiques fournit (il suffit de noter que la multiplication itérative d'un vecteur par une matrice triangulaire ayant des termes de valeur absolue inférieure à 1 sur sa diagonale tend vers 0) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^+(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n, \lim_{m \rightarrow +\infty} f^m(x) = 0\} \\ \mathcal{W}^-(f) &= \{x \in \mathbb{R}^n, \lim_{m \rightarrow +\infty} f^{-m}(x) = 0\} \end{aligned}$$

On a alors que \mathcal{W}^+ et \mathcal{W}^- sont des invariants topologiques en utilisant :

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, g^m = h \circ f^m \circ h^{-1}$$

PREUVE DE [3.D].

On a $h \in \mathcal{H}$ tel que $g = h \circ f \circ h^{-1}$, donc (pour $\sigma = \infty, +, -, a$), $g|_{\mathcal{W}^\sigma(g)} = h \circ f \circ h|_{\mathcal{W}^\sigma(g)}^{-1} = h \circ f|_{\mathcal{W}^\sigma(f)} \circ h^{-1}$ (par l'invariance topologique de \mathcal{W}^σ), d'où $g_\sigma = h \circ f_\sigma \circ h^{-1}$, d'où $f_\sigma \stackrel{t}{\sim} g_\sigma$. □

Remarque 1.

\mathcal{W}^0 n'est, en général, pas un invariant topologique comme pourrait le montrer

l'étude de l'automorphisme de \mathbb{R}^3 donné par :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Enfin, définissons simplement la fonction orientation :

$$\text{or}(f) = \text{signe}(\det f) = \begin{cases} 1 & \text{si } \det f > 0 \\ 0 & \text{si } \det f = 0 \\ -1 & \text{si } \det f < 0 \end{cases}$$

3.1.2 Intérêt

L'intérêt de la classification topologique est qu'elle est intimement reliée à la dynamique du système autonome relié aux endomorphismes classés.

En fait, deux endomorphismes f et g équivalents topologiquement sont complètement identiques du point de vue dynamique. Par "dynamique", on entend que l'action de chaque endomorphisme est exactement la même, simplement déplacée d'un repère dans un autre. Typiquement, on considère f et g comme des champs de vecteurs linéaires et on étudie le comportement de leurs itérées :

$$\begin{aligned} \varphi_n &: \begin{cases} \varphi_0 = x_0 \\ \varphi_{n+1} = f(\varphi_n) \end{cases} \\ \psi_n &: \begin{cases} \psi_0 = x_0 \\ \psi_{n+1} = g(\psi_n) \end{cases} \end{aligned}$$

L'équivalence topologique de f et de g permet alors de déduire des propriétés de ressemblance très fortes entre les comportements de φ_n et ψ_n . Attention cependant, toutes les informations obtenues seront exclusivement qualitatives, et non quantitatives (il faudrait connaître le conjuguant pour espérer avoir de telles informations). Par exemple, et comme on va le démontrer dans la prochaine section, si on connaît le nombre de directions asymptotiques positives ou négatives de φ_n , on est certain que ψ_n en a autant. Ainsi, l'allure des itérées est la même, à un homéomorphisme près. La figure 1 illustre ceci en exhibant la dynamique de deux endomorphismes conjugués topologiquement (en dimension 2) :

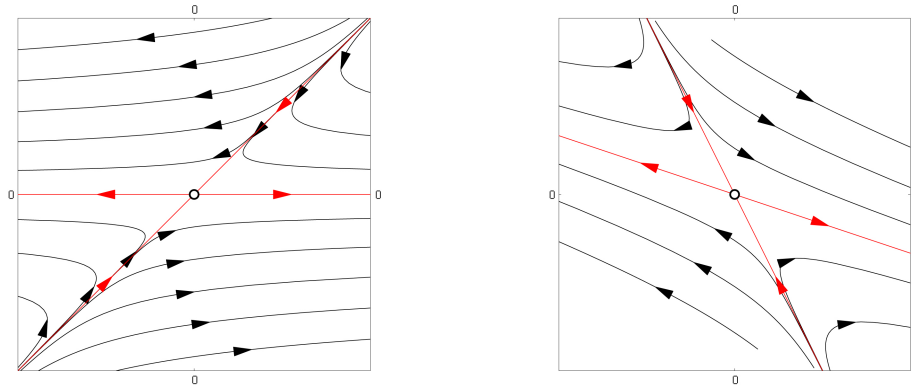


Figure 1: Dynamiques de deux endomorphismes topologiquement équivalents

Remarque 2.

Nous avons ici adopté un point de vue “discret” en considérant les itérées des endomorphismes. Les mêmes remarques peuvent être faites sur les systèmes “continus” correspondant à f et à g :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= f(\varphi(t)) \\ \psi'(t) &= g(\psi(t))\end{aligned}$$

Par contre, les critères sur les valeurs propres ne sont plus tout à fait les mêmes (mais équivalents, on doit alors passer à l'exponentielle).

3.2 Classes de conjugaison hyperboliques

On appelle endomorphismes hyperboliques, et on note $\mathcal{HL}(\mathbb{R}^n)$ leur ensemble, les endomorphismes f de \mathbb{R}^n pour lesquels $\mathcal{W}^0(f) = \{0\}$, i.e. les f n'ayant aucune valeur propre de module 1.

Nous allons commencer par étudier les classes d'équivalence de $\overset{t}{\sim}$ sur cet ensemble. C'est, comme on le verra, plus aisé que dans le cas général (on évite le problème posé par le fait que \mathcal{W}^0 n'est pas un invariant topologique). De plus, cet ensemble constitue un ouvert dense de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, donc on traite ici le cas *générique* de l'endomorphisme de \mathbb{R}^n .

3.2.1 La partie nilpotente

[3.E] THÉORÈME. (Équivalence topologique des nilpotents)

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$, alors :

$$f \overset{t}{\sim} g \quad \Rightarrow \quad f_\infty \overset{l}{\sim} g_\infty$$

[3.F] COROLLAIRE.

Deux endomorphismes nilpotents sont topologiquement équivalents si et seulement si ils sont linéairement équivalents.

Ce corollaire est immédiat en combinant [3.D] et [3.E].

PREUVE DE [3.E].

Soient f et g deux endomorphismes de \mathbb{R}^n tels que $f \stackrel{t}{\sim} g$. Si l'on montre que pour tout entier k on a $N_f(0, k) = N_g(0, k)$, alors les $N_f(0, k)$ pourront être considérés comme invariants topologiques. Et comme f_∞ et g_∞ n'ont pour valeur propre éventuelle que 0 par définition, f_∞ et g_∞ auraient les mêmes blocs de Jordan, d'où $f_\infty \stackrel{t}{\sim} g_\infty$ par la caractérisation des classes de similitude établie en [2.D].

Reste donc à montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_f(0, k) = N_g(0, k)$. Pour cela, il suffit de noter que :

$$\sum_{j \geq k} N_f(0, j) = \dim(\operatorname{Im} f^{k-1} \cap \operatorname{Ker} f) \quad (3.i)$$

Ainsi, en acceptant provisoirement cette égalité, cette somme est un invariant topologique (définie à partir de termes topologiques sur f). Puis, en écrivant :

$$N_f(0, k) = \sum_{j \geq k} N_f(0, j) - \sum_{j \geq k+1} N_f(0, j)$$

on obtient bien que $N_f(0, k)$ est un invariant topologique pour tout entier k , et donc que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $N_f(0, k) = N_g(0, k)$.

Revenons sur l'égalité (3.i). Elle provient d'une étude simple du résultat des itérées de h_j , pour $j \in \mathbb{N}^*$ fixé. Il est immédiat que si $j < k$, alors h_j^{k-1} est nulle (h_j est nilpotente d'indice $j \leq k-1$), et donc $\operatorname{Im} h_j^{k-1} \cap \operatorname{Ker} h_j = \{0\}$. Sinon, h_j^{k-1} est de la forme :

$$h_j^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où les 1 sont sur la $(k-1)^{\text{eme}}$ diagonale.

Ainsi, en notant $b = (b_1, \dots, b_j)$ une base adaptée à ce bloc, on a $\operatorname{Im} h_j^{k-1} = \operatorname{Vect}(b_1, \dots, b_{j-k+1})$. Or, il est immédiat de voir que $\operatorname{Ker} h_j = \operatorname{Vect}(b_1)$ d'après la forme de h_j . Donc on obtient : $\operatorname{Im} h_j^{k-1} \cap \operatorname{Ker} h_j = \operatorname{Vect}(b_1)$.

Pour résumer, on a donc le résultat suivant :

$$\dim(\operatorname{Im} h_j^{k-1} \cap \operatorname{Ker} h_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Chaque bloc de Jordan de la forme normale de f étant stable par f , on peut appliquer indépendamment ce raisonnement à chacun. On arrive alors à l'égalité : $\sum_{j \geq k} N_f(0, j) = \dim(\operatorname{Im} f^{k-1} \cap \operatorname{Ker} f)$ qui est l'égalité (3.i) que l'on voulait prouver. □

3.2.2 La partie automorphique

Le but de cette partie est d'établir le :

[3.G] THÉORÈME. (Conjugaison des automorphismes hyperboliques)

Soient f et $g \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n)$ inversibles, alors :

$$f \stackrel{t}{\sim} g \iff \begin{cases} \text{rg}(f_+) = \text{rg}(g_+) \\ \text{rg}(f_-) = \text{rg}(g_-) \\ \text{or}(f_+) = \text{or}(g_+) \\ \text{or}(f_-) = \text{or}(g_-) \end{cases}$$

Remarque 3.

L'hypothèse “ f et g inversibles” est simplement ici pour assurer que $\mathcal{W}^\infty(f) = \mathcal{W}^\infty(g) = \{0\}$.

De ce théorème, on tire immédiatement le :

[3.H] COROLLAIRE. (Dénombrement des classes topologiques)

Il y a exactement $4n$ classes d'équivalence topologique au sein des automorphismes hyperboliques.

Le nombre plus raisonnable de classes d'équivalence topologique par rapport à celles de similitude laisse présager d'une meilleure classification : on peut espérer une classification selon des caractères structurels et non quantitatifs.

PREUVE DE [3.G].

Le sens direct est évident au vu des résultats déjà établis. En effet, le rang d'une application ainsi que son orientation sont clairement des invariants topologiques. Donc [3.D] permet d'établir le sens direct.

C'est le sens indirect qui est beaucoup moins aisé à démontrer. Déjà, on peut simplifier le problème en remarquant que :

1. *L'équivalence topologique respecte les sommes directes*
ie. si $f = f_1 \oplus f_2$ et $g = g_1 \oplus g_2$ (notations évidentes), alors

$$f \stackrel{t}{\sim} g \iff f_1 \stackrel{t}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \stackrel{t}{\sim} g_2$$

2. $f_+ = ((f^{-1})_-)^{-1}$

Ces faits sont évidents sitôt qu'on écrit f sous sa forme normale de Jordan, c'est pourquoi ils ne seront pas démontrés ici. Ils permettent de réduire la preuve du théorème à celle de $f_- \stackrel{t}{\sim} g_-$ sous les mêmes hypothèses. En appliquant le résultat à f^{-1} et g^{-1} (les hypothèses étant clairement vérifiées), on aurait alors $(f^{-1})_- \stackrel{t}{\sim} (g^{-1})_-$, d'où $((f^{-1})_-)^{-1} \stackrel{t}{\sim} ((g^{-1})_-)^{-1}$, et $f_+ \stackrel{t}{\sim} g_+$ (par le point 2 ci-dessus). Le sens indirect serait alors entièrement prouvé d'après le point 1.

Reste donc à montrer le :

[3.I] LEMME.

Soient $(f, g) \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\begin{cases} \text{rg}(f_-) = \text{rg}(g_-) \\ \text{or}(f_-) = \text{or}(g_-) \end{cases} \implies f_- \overset{t}{\sim} g_-$$

PREUVE DE [3.I].

Dans cette preuve, on confondra les matrices dans une base (fixée) de \mathbb{R}^n et les applications linéaires associées, le contexte étant très clair.

Pour établir ce lemme, il nous faut remarquer que, si $\varepsilon = \pm 1$:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \varepsilon \lambda \end{pmatrix} \overset{t}{\sim} \begin{pmatrix} \varepsilon e & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon e \end{pmatrix} \quad (3.ii)$$

(où $e = \exp(1)$ et $1 < |\lambda|$)

En acceptant cette équivalence topologique, [3.I] devient facile à prouver.

En effet, (3.ii) nous dit que : $h_{j, \varepsilon \lambda} \overset{t}{\sim} \varepsilon e \mathbb{I}_j$. Il reste alors à remarquer qu'on a simplement :

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \overset{t}{\sim} \begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \quad (3.iii)$$

Ainsi, en appliquant (3.ii) et (3.iii) à la décomposition de Jordan de f_- , on obtient que :

$$f_- \overset{t}{\sim} \begin{pmatrix} \text{or}(f_-) e & & & \\ & e & & \\ & & \ddots & \\ & & & e \end{pmatrix} = E_f$$

On constate alors que $\text{rg}(f_-) = \text{rg}(g_-)$ et $\text{or}(f_-) = \text{or}(g_-)$ permettent de conclure que $f_- \overset{t}{\sim} g_-$. En effet, $\text{rg}(f_-) = \text{rg}(g_-)$ assure que la taille de E_f est la même que celle de E_g , et $\text{or}(f_-) = \text{or}(g_-)$ que $E_f = E_g$. Ainsi, f_- et g_- sont topologiquement équivalents au même endomorphisme de matrice $E = E_f = E_g$. Par transitivité, on a bien $f_- \overset{t}{\sim} g_-$.

Reste donc à montrer (3.ii) et (3.iii) pour achever la démonstration du lemme, et donc celle du théorème. Pour cela, considérons le :

[3.J] LEMME.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^2$, $\varepsilon = \pm 1$, $j \in \mathbb{N}^*$. Posons a et b dans $\mathcal{HL}(\mathbb{R}^j)$ inversibles :

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma}(x) &= (\varepsilon \exp(\alpha + i\beta + \gamma h_j))(x) \\ b_\varepsilon(x) &= (\varepsilon e)(x) \end{aligned}$$

alors, on a :

$$a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \stackrel{t}{\sim} b_\varepsilon$$

Acceptons quelques instants ce lemme pour montrer (3.ii) et (3.iii).

(3.iii) est prouvée par le fait que “eI” est la matrice de l’automorphisme hyperbolique $a_{-1, 1, \pi, 0}$ (notations du lemme) qui est, par le lemme, topologiquement équivalent à b_{-1} . C’est le résultat voulu.

(3.ii) découle du fait que h_j est linéairement (et donc topologiquement) conjugué à toute matrice nilpotente de taille j et de noyau unidimensionnel (c’est immédiat par le théorème de Jordan). Ainsi, si $\lambda = \exp(\alpha + i\beta)$ (on travaille sur f_- donc $|\lambda| > 1$ d’où $\alpha > 0$), on a :

$$\begin{aligned} b_\varepsilon &\stackrel{t}{\sim} a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \\ &= \varepsilon \exp(\alpha + i\beta + \gamma h_{j, \lambda}) \\ &= \varepsilon \lambda \mathbb{I}_j + \varepsilon \mathbb{T}_{\gamma, j} \\ &\stackrel{t}{\sim} \varepsilon \lambda \mathbb{I}_j + h_j \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}_{\gamma, j}$ est triangulaire supérieure stricte de noyau unidimensionnel (les termes sur-diagonaux sont non-nuls).

On a donc finalement l’équivalence voulue. Revenons donc à la preuve de [3.J] qui terminera cette démonstration.

PREUVE DE [3.J].

On prend les hypothèses du lemme et les mêmes notations. Le but de la démarche qui va suivre est de montrer que $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma}$ et b_ε sont *différentiellement* équivalents, ce qui implique trivialement l’équivalence topologique. Pour cela, on va montrer que l’on peut passer de l’action de $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma}$ à celle de b_ε par un changement de repère \mathcal{C}^1 .

On notera ici $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire usuel du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C}^j :

$$\langle x, y \rangle = \Re \left(\sum_{i=1}^j x_i \bar{y}_i \right)$$

pour $x = (x_1, \dots, x_j)$ et $y = (y_1, \dots, y_j)$ dans \mathbb{C}^j . On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne associée, et on remarquera que $\langle x, ix \rangle = 0$.

Etudions maintenant le système différentiel défini comme suit :

$$\varphi'(t) = (\alpha + i\beta + \gamma h_j)(\varphi(t)) \quad (3.iv)$$

On peut écrire immédiatement le flux associé à cette équation :

$$\phi_x(t) = \exp(t(\alpha + i\beta + \gamma h_j))(x)$$

qui est l'évolution temporelle de la solution vérifiant $\phi_x(0) = x$. Etudions maintenant la dynamique de ϕ_x . L'équation (3.iv) nous donne :

$$\phi'_x = (\alpha + i\beta + \gamma h_j) \circ \phi_x$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_x\|^2 &= 2 \langle \phi'_x, \phi_x \rangle \\ &= \alpha \|\phi_x\|^2 + \gamma \langle h_{j,\lambda} \phi_x, \phi_x \rangle \end{aligned}$$

et comme $\|h_{j,\lambda} \phi_x\| \leq \|\phi_x\|$ (clairement), Cauchy-Schwarz donne que

$$|\langle h_{j,\lambda}, \phi_x \rangle| \leq \|\phi_x\|^2$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt} \|\phi_x\|^2 \geq 2(\alpha - \gamma) \|\phi_x\|^2 \quad (3.v)$$

Par simple conjugaison linéaire, on peut rendre γ aussi petit que voulu ($h_{j,\lambda} \stackrel{l}{\sim} \gamma h_{j,\lambda}$). C'est pourquoi on peut supposer $\gamma < \alpha$ sans restreindre la généralité de la démonstration (car $\alpha > 0$). Donc on obtient que :

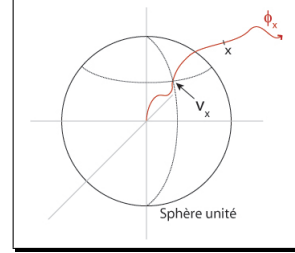
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} \|\phi_x(t)\|^2 > 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|\phi_x(t)\|^2$ est une fonction strictement croissante de t . Par suite, l'inégalité (3.v) fournit que :

$$\|\phi_x(t)\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \|\phi_x(t)\|^2 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

En résumé, $\|\phi_x(t)\|^2$ est surjective sur \mathbb{R}_+^* pour $t \in \mathbb{R}$.

Cela permet de conclure que ϕ_x rencontre toute sphère de rayon strictement positif centrée en 0. En particulier, ϕ_x rencontre la sphère unité transversalement et en un seul point. Appelons v_x ce point d'intersection, et t_x le temps correspondant à l'équation suivante (la surjectivité précitée et l'invariance par translation d'un flux correspondant à un système différentiel autonome justifient l'existence de t_x) :



$$\begin{aligned} x &= \phi_{v_x}(t_x) \\ &= \exp(t_x(\alpha + i\beta + \gamma h_j)) (v_x) \end{aligned}$$

Ainsi, en se plaçant dans le repère de la courbe image de ϕ_x (le changement de repère est \mathcal{C}^1 car ϕ_x l'est), on peut désigner x de manière unique par t_x et v_x . Par injectivité de l'exponentielle sur \mathbb{R} , $(\exp(t_x), v_x)$ permet également de désigner uniquement x dans ce repère curviligne. D'autre part, le caractère \mathcal{C}^∞ de l'exponentielle garantit que le changement de repère est toujours \mathcal{C}^1 . Dans ce nouveau repère, l'action de $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma}$ est très simple de par sa définition (cf. [3.J]) :

$$a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} : (\exp(t), v) \mapsto (\exp(t+1), \varepsilon v)$$

Remarquons d'autre part que l'action de b_ε se prête particulièrement bien à une description dans le repère polaire de \mathbb{C}^j . En effet, si on pose $r = \|x\|$ et $\theta = \frac{x}{\|x\|}$, on peut déterminer x uniquement par r et θ de manière \mathcal{C}^1 par rapport à la base canonique sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et (cf. [3.J]) :

$$b_\varepsilon : (r, \theta) \mapsto (er, \varepsilon\theta)$$

Finalement, on a donc montré que $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma}$ et b_ε ont la même action sur deux repères reliés de façon \mathcal{C}^1 à la base canonique. On en conclut $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \stackrel{d}{\sim} b_\varepsilon$. Par suite, $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \stackrel{t}{\sim} b_\varepsilon$ ce qui achève la démonstration. Notons cependant ici l'abus de notation évident : $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \stackrel{d}{\sim} b_\varepsilon$, mais on n'a pas $a_{\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma} \stackrel{l}{\sim} b_\varepsilon$ car l'équivalence différentielle, ici, ne vaut pas en 0. □

Remarque 4.

L'étude des composantes connexes de $\mathcal{HL}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ permettrait de montrer que notre théorème est équivalent à dire que deux automorphismes hyperboliques sont topologiquement conjugués si et seulement si ils appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{HL}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.

3.2.3 Conclusion

Finalement, on peut regrouper les théorèmes précédents en un seul qui résout complètement la question des classes d'équivalence topologique des endomorphismes hyperboliques :

[3.K] THÉORÈME. (Classification topologique des hyperboliques)

Soient $(f, g) \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n)^2$, alors :

$$f \stackrel{t}{\sim} g \iff \begin{cases} f_\infty \stackrel{l}{\sim} g_\infty \\ \text{rg}(f_+) = \text{rg}(g_+) \\ \text{rg}(f_-) = \text{rg}(g_-) \\ \text{or}(f_+) = \text{or}(g_+) \\ \text{or}(f_-) = \text{or}(g_-) \end{cases}$$

3.3 Classes de conjugaison non hyperboliques

Nous considérons dans cette partie les endomorphismes non hyperboliques, *ie.* les endomorphismes ayant des valeurs propres de module 1. Plus précisément, on va considérer seulement la partie non hyperbolique des endomorphismes. Autrement dit, on considère que si on a un endomorphisme f , alors $f = f_0$ avec les notations précédentes.

La classification de ces endomorphismes à conjugaison topologique près est très compliquée, et non encore résolue entièrement à ce jour.

Les résultats et démarches dans cette voie étant très complexes, nous nous limiterons à donner ici les conclusions auxquelles aboutissent **Kuiper** et **Robbin** dans leur article dans un premier temps, pour énoncer ensuite les résultats atteints par certains de leurs successeurs quelques années plus tard.

La principale conjecture faite est la suivante :

[3.L] CONJECTURE.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$, alors :

$$f_0 \overset{t}{\sim} g_0 \iff f_0 \overset{l}{\sim} g_0$$

Cette conjecture implique un comportement très rigide des endomorphismes : il ne pourrait y avoir deux endomorphismes non hyperboliques conjugués topologiquement mais non linéairement.

On sait depuis Poincaré que la conjecture [3.L] est vraie pour $n = 2$. Dans [1], les auteurs montrent que la conjecture est vraie pour $n \leq 5$, mais fautive pour $n \geq 6$ en donnant des contre-exemples. Ainsi, il ne faut pas espérer une classification si simple dans le cas général.

Depuis ces travaux, beaucoup de recherches ont été menées dans le but de découvrir la réelle nature de cette classification topologique, mais toujours en vain. On cerne de mieux en mieux le problème (des résultats sont apparus pour des valeurs particulières de n , ...) mais personne ne l'a encore résolu entièrement.

4 Le théorème de Grořman - Hartman

4.1 Préliminaire

Le théorème de Grořman - Hartman étant lui-même assez substantiel, nous nous appuyerons sur une version faible du théorème d'Anosov pour l'établir (ce dernier s'énonce sous sa forme plus générale en dimension infinie) :

[4.A] THÉORÈME. (Version faible du théorème d'Anosov)

Soit $f \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.
 Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction p de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n continue, bornée, et ε -lipschitzienne, on ait $f + p \stackrel{t}{\sim} f$.

Heuristiquement, ce théorème traduit le fait intuitif qu'une perturbation bornée et assez petite au sens lipschitzien d'un automorphisme hyperbolique lui reste topologiquement conjuguée.

PREUVE DE [4.A].

La démonstration de ce théorème étant coûteuse, on se limitera ici à donner les principales idées sans les détailler.

Prenons $f \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ et p ε -lipschitzienne comme dans l'énoncé du théorème. On cherche donc prouver qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que :

$$(f + p) \circ h = h \circ f \quad (4.i)$$

Si $p = 0$, $h = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ convient. Cela nous conduit à chercher h sous la forme $h = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} + u$, avec u continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . L'écriture de (4.i) devient alors :

$$p \circ (f^{-1} + u \circ f^{-1}) + f \circ u \circ f^{-1} = u$$

Pour simplifier l'écriture, posons les opérateurs :

$$T : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto f \circ u \circ f^{-1} \end{cases}$$

$$P_p : \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ u & \mapsto p \circ (f^{-1} + u \circ f^{-1}) \end{cases}$$

Prouver le théorème revient alors à montrer que $T + P_p$ admet un point fixe.

Pour cela, on remarque que P_p est ε -lipschitzienne dans l'espace des fonctions continues bornées (pour la norme infinie). On peut alors établir un lemme donnant que $T + P_p$ est strictement contractant dans ce même espace normé. Le théorème du point fixe (on est bien dans un espace de Banach avec la norme infinie) donne alors l'existence — et même l'unicité — du point fixe voulu.

Il reste alors à vérifier que $h = \text{Id}_{\mathbb{R}^n} + u$ (où u est le point fixe sus-nommé) est bien un homéomorphisme. Ceci achevé, le théorème est prouvé. □

4.2 Théorème de Großman - Hartman

Enonçons maintenant le :

[4.B] THÉORÈME. (Großman - Hartman)

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $df_{(0)} \in \mathcal{HL}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$.
Alors, $f \stackrel{t}{\sim} df_{(0)}$ sur un domaine suffisamment proche de 0.

Ce théorème traduit un fait intuitif très fort : sur un voisinage de l'origine, une fonction continûment dérivable de \mathbb{R}^n fixant l'origine est topologiquement conjuguée à sa différentielle en 0. Par translation, on généralise facilement ce théorème à une situation où 0 est remplacé par un certain point fixe x de f dans \mathbb{R}^n .

Ce théorème présente un résultat très important de "linéarisation" de fonctions vectorielles autour d'un point fixe, localement. L'étude effective du comportement local de fonctions assez régulières autour de points fixes est ainsi réduite à celle de l'application linéaire tangente en ces points. La complexité en est donc largement réduite.

Remarque 5.

Il est à noter que h n'est à priori pas "mieux" qu'un homéomorphisme. En effet, des phénomènes de résonances d'indices parmi les valeurs propres peuvent rendre la différentiabilité de h difficile à obtenir.

PREUVE DE [4.B].

Commençons par constater que 0 est nécessairement point fixe de f afin de justifier l'hypothèse $f(0) = 0$. Si on suppose l'existence de $h \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ proche de } 0, f(x) = h \circ df_{(0)} \circ h^{-1}(x) \quad (4.ii)$$

Alors on a $f \circ h(0) = h(0)$, d'où $h^{-1} \circ f(0) = h^{-1}(0)$. Ainsi, (4.ii) donne que : $df_{(0)} \circ h^{-1}(0) = h^{-1}(0)$. Or, $df_{(0)}$ est hyperbolique donc n'a pas 1 comme valeur propre. Par conséquent, on a nécessairement $h(0) = 0$. Puis, en évaluant (4.ii) en 0, on obtient que nécessairement $f(0) = 0$.

Passons à la démonstration proprement dite du théorème.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose B_ε une boule fermée de centre 0 et de rayon r_ε telle que :

$$\forall x \in B_\varepsilon, \quad ||| df_{(x)} - df_{(0)} ||| \leq \varepsilon$$

Ainsi, en posant $g = f - df_{(0)}$, on a :

$$\forall x \in B_\varepsilon, \quad ||| dg_{(x)} ||| \leq \varepsilon$$

On obtient donc que g est ε -lipschitzienne sur B_ε . On définit l'application g_ε de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n par :

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in B_\varepsilon \\ g\left(r_\varepsilon \frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \notin B_\varepsilon \end{cases}$$

Ainsi, il est clair que g_ε est à la fois bornée et ε -lipschtizienne sur \mathbb{R}^n .

Alors, en choisissant ε assez petit, le théorème d'Anosov s'applique et donne que $df_{(0)} + g_\varepsilon \stackrel{t}{\sim} df_{(0)}$ sur \mathbb{R}^n tout entier. Or, par définition de g_ε , on a $df_{(0)} + g_\varepsilon = f$ sur B_ε . D'où finalement $f \stackrel{t}{\sim} df_{(0)}$ sur B_ε , ce qui montre le théorème.

□

Références

- [1] **S. Cappell** et **J. Shaneson**, *Nonlinear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6*, Tel Aviv topology conference : Rothenberg Festschrift ; American Mathematical Society Contemp. Math. 231, pp 59-66 (1999)
- [2] **R. Devaney**, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley (1982)
- [3] **P. Hartman**, *Ordinary differential equations*, Boston Birkhauser (1982, réédition de 1973)
- [4] **M.C. Irwin**, *Smooth dynamical systems*, World scientific (2001, réédition de 1980)
- [5] **N.H Kuiper** et **J.W. Robbin**, *Topological classification of linear endomorphisms*, Invent. Math. **19** (1973), pp 83-106
- [6] **F. Laudenbach**, *Equations différentielles*, conférence journées X-UPS 1996
- [7] **P. Rouchon**, *Systèmes dynamiques et modélisation*, notes de cours Mines de Paris (1993)
- [8] **N. Tosel**, *Les théorèmes d'Anosov et de Großman - Hartman*, manuscrit
- [9] **G. Vial**, *Autour de la réduction de Jordan*, document internet